Testowanie hipotez statystycznych

Marta Zalewska
Zakład Profilaktyki Zagrożeń Środowiskowych i Alergologii

Hipotezy: przypuszczenia na temat populacji np.:

- Więcej niż 30% pacjentów ma niewydolność oddechową
- Zachorowalność na gruźlicę jest taka sama w mieście i na wsi
- Ropniak płuc występuje u 10% pacjentów chorych na płuca
- Średnia masa ciała noworodka płci męskiej wynosi 3250 g

Wybór pomiędzy dwiema możliwościami na podstawie danych:

“Czy możemy przyjąć że nasze przypuszczenie jest prawdziwe, czy też nie?

Hipoteza może być albo ***PRAWDZIWA*** albo ***FAŁSZYWA***

Nigdy nie będzie wiadomo na pewno, z powodu *losowości pobieranych danych*

Schemat testowania hipotez statystycznych:

- Ustalenie pytania badawczego
- Zbudowanie modelu
- Pobranie próbki
- Dobranie testu
- Przyjęcie poziomu istotności (np. 0.05)
- Wykonanie testu (obliczenie poziomu krytycznego p (p-value)
- Decyzja statystyczna: (np.

  p<0.05 odrzucamy Ho i akceptujemy hipotezę alternatywną

  p>=0.05 nie ma podstaw do odrzucenia Ho)
- Interpretacja wyników testu

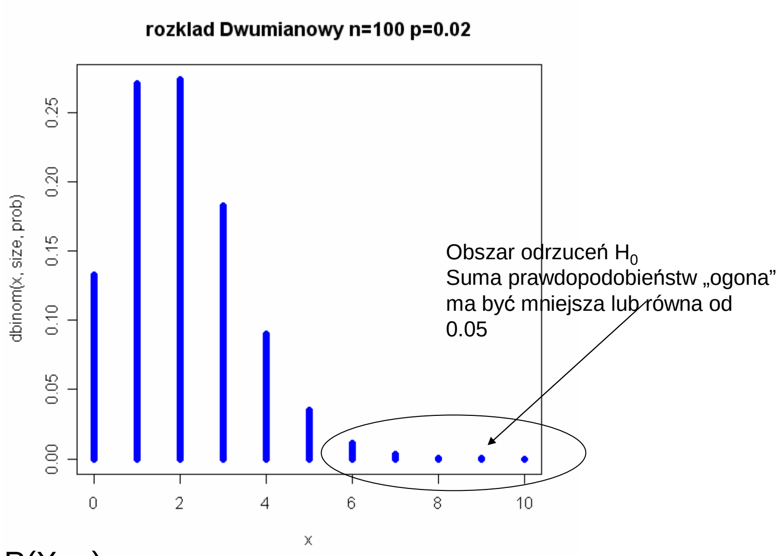
Testowanie hipotez przykład

Producent twierdzi, że skuteczność leku wynosi 98%.Chcemy sprawdzić, czy możemy wierzyć producentowi.

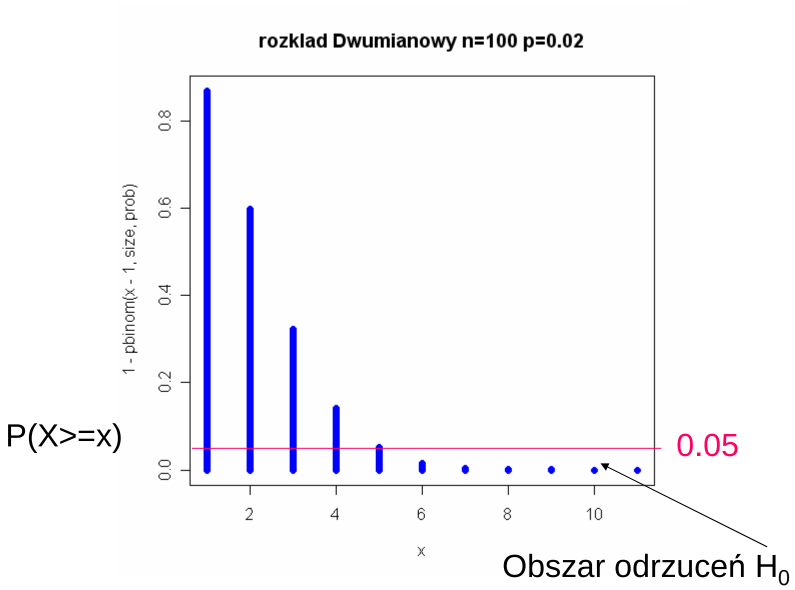
- Zakładamy, że nieskuteczność wynosi 2% (tzn. skuteczność wynosi 98%)
- Pobieramy próbę losową z populacji osób przyjmujących lek (np.100 osób)
- Zaobserwowano 7 osób u których lek okazał się nieskuteczny Albo - Przypuszczenie jest słuszne i próba „pechowa” Albo - Próba jest „dobra”, a przypuszczenie złe.

$p=0.004062 < 0.05$ hipotezę odrzucamy

k	P(X=k)	P(X>k)	p(X>=k)
0	0,132620	0,867380	1,000000
1	0,270652	0,596728	0,867380
2	0,273414	0,323314	0,596728
3	0,182276	0,141038	0,323314
4	0,090208	0,050830	0,141038
5	0,035347	0,015483	0,050830
6	0,011422	0,004062	0,015483
7	0,003130	0,000932	0,004062
8	0,000743	0,000189	0,000932
9	0,000155	0,000034	0,000189



P(X=x)



Przykład c.d.

Ostatecznie

Po zaobserwowaniu co najmniej 6 osób u których lek okazał się nieskuteczny - raczej uznać twierdzenie producenta za nieprawdziwe. W przeciwnym przypadku można uznać twierdzenie producenta za uzasadnione.

Przybliżony test dla wskaźnika struktury, c.d. przykładu

$n = 100$

$k = 7$

$\hat{p} = \frac{7}{100}$

$H_0 : p = p_0 = 0.02$

$H_1 : p > 0.02$

$Z = \sqrt{n}\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$

$Z = \sqrt{100}\frac{0.07-0.02}{\sqrt{0.02(1-0.02)}}$ =3.57

$1-\alpha$ = 0.95

1.644854 kwantyl rozkładu $N(0,1^2)$

$z = z_{1-\alpha} = z_{0.95}$ = 1.645

$Z_{obl} > z_{tab}$

Odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej

- nieskuteczność leku jest istotnie wyższa od 2 % nie zgadzamy się z
- tym co twierdzi producent. Zaufanie do tego wniosku mamy 95%

Testowanie hipotez przykład

- Przykład: paczkowanie masła.
- Wiemy, że maszyna do paczkowania średnio myli się o 5 g (w górę i w dół) (odchylenie standardowe)

Próbka n=10 paczek i ważymy : 247,252,250…. 260

Masa pojedynczego opakowania masła jest zmienną losową X. Zakładamy X~ $N(\mu,\sigma^2)$ z nieznaną μ i znanym odchyleniem standardowym σ = 5g

Przypuszczamy, że maszyna dobrze paczkuje, ale nie jesteśmy pewni. Stawiamy hipotezą statystyczną (zerową):

H_0: μ =250 przeciwko H_1: $\mu \neq 250$

hipoteza alternatywna

Norma wynikająca z teorii to hipoteza H_0 .

Testowanie hipotez przykład c.d.

- Pojawiają się pytania:
  - Czy wynik jest możliwy przy prawdziwej hipotezie H_0?
  - Czy wynik dziwny, czy nie dziwny?
    (np. wynik 230 g możliwy ale dziwny)

Na pytania odpowiada test istotności.

Test : to reguła podejmowania decyzji
- odrzucić H_0
- nie odrzucić H_0

W zasadzie działamy na korzyść H_0; dopiero, jak dane świadczą silnie przeciwko tej hipotezie to ją odrzucamy. W przeciwnym wypadku mówimy, że dane nie świadczą przeciwko hipotezie.

Konstruujemy test:
Odrzucamy H_0 gdy:

$$\left|\bar{X} - 250\right| > k$$

Liczbę k wyznaczamy tak (żeby dobrą maszynę rzadko kwestionować – należy ustalić sobie z góry założony poziom, nazywa się on poziomem istotności α)

Prawdopodobieństwo, że odrzucimy H_0 gdy jest ona prawdziwa wynosi:

$$P(\left|\bar{X} - 250\right| > k) = 0.05$$

Arbitralnie wybrana „mała liczba”, tradycyjnie 5% , 1%

Prawdziwa hipoteza zerowa mówi nam, że pojedyncza paczka ma rozkład prawdopodobieństwa $X \sim N(250, 5^2)$

Jaki ma rozkład prawdopodobieństwa średnia z 10 niezależnych zmiennych losowych (średnia z 10 paczek).

$$\overline{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(250, \frac{5^2}{10})$$

Teraz standaryzujemy $\overline{X}$ tzn sprowadzamy do rozkładu $N(0, 1^2)$

$$\frac{\overline{X} - 250}{\frac{5}{\sqrt{10}}}$$

Teraz $Z = \frac{\overline{X} - 250}{\frac{5}{\sqrt{10}}}$ ma rozkład $N(0, 1^2)$

Z zmienna losowa standaryzowana

$$P\left(\frac{\left|\overline{X} - 250\right|}{\frac{5}{\sqrt{10}}} > \frac{k}{\frac{5}{\sqrt{10}}}\right) = 0.05$$

$P(|Z| > ......) = 0.05$ Odczytujemy z tablic 1.96

Pole na lewo będzie 0.975 – Odczytujemy Z kwantyl rzędu 0.975

1.959964

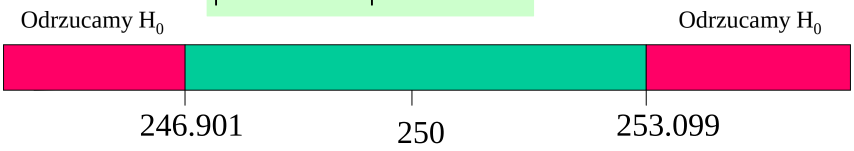
$$1.96 = \frac{k}{\frac{5}{\sqrt{10}}}$$

$$k = \frac{1.96 \cdot 5}{\sqrt{10}} = \frac{9.8}{3.1622} = 3.099$$

Aby test był na poziomie istotności $\alpha = 0.05$

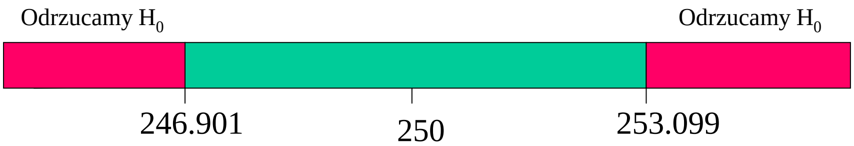
To odrzucamy H_0 gdy:

$$\left|\overline{X} - 250\right| > 3.099$$



Dla dobrej maszyny paczkującej wyniki w obszarze nie odrzuconym trafiają się z prawdopodobieństwem 95% (często), a inne poniżej wartości 246.901 i powyżej 253.099 trafiają się z prawdopodobieństwem 0.05 (rzadko)

Jest to test na poziomie istotności 5% $\alpha = 0.05$



Jeśli $\left|\overline{X} - 250\right| > 3.099$ to mówimy

że $\overline{X}$ różni się istotnie od 250 na poziomie

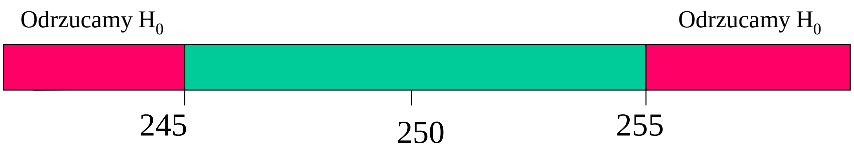
$$\alpha = 0.05$$

Jeżeli różni się istotnie, to znaczy świadczy istotnie przeciwko naszym przypuszczeniom.
Jak zważymy karton 10 paczek masła i wyjdzie nam średnia 251 , to stwierdzamy, że różnica jest nieistotna i nie mamy powodu do odrzucenia hipotezy zerowej.
Jak nam wyjdzie średnia 255 to różni się istotnie od 250
Na poziomie istotności, który wybraliśmy.
Wyliczamy średnią z naszego przykładu. $\overline{X} = 256$

Rezultat testu na poziomie istotności 0.05 :
Odrzucamy hipotezę zerową na rzecz hipotezy alternatywnej.
W praktyce mamy podstawy do zakwestionowania prawidłowości maszyny.

Co by się działo, gdybyśmy mieli próbkę n=4

$$\left|\overline{X} - 250\right| > \frac{1.96 \cdot 5}{\sqrt{4}} = 5$$



Inna hipoteza

Nasze przypuszczenie - maszyna działa dobrze albo zaniża

$$H_0 : \mu \le 250$$

$$H_1 : \mu > 250$$

W tym przypadku protestujemy

Odrzucamy H_0 gdy

$$\overline{X} - 250 > k'$$

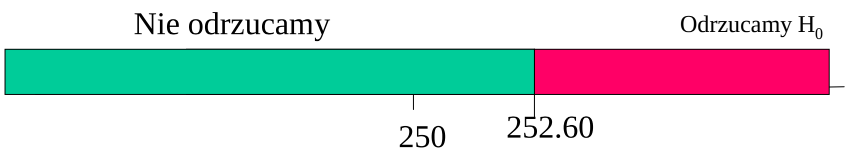
i znowu standaryzujemy

$$P(\overline{X} - 250 > \frac{1.645 \cdot 5}{\sqrt{10}}) = 0.05$$

$Z_{0.95}$=1.645

$$k' = \frac{1.645 \cdot 5}{\sqrt{10}} = 2.60$$

$$\overline{X} > 250 + 2.60$$



Kolejność postępowania:

1. Przyjęcie założeń ($N(\mu,\sigma^2)$, σ znane, niezależność)
2. Sformułować H_0 i H_1 ($H_0: \mu = 250$)
3. Wybrać poziom istotności α ($\alpha = 0.05$)
4. Obliczyć statystykę testową ($|\overline{X} - 250| = 6$)
5. Porównać z poziomem krytycznym ($|\overline{X} - 250| > 3.099$)
6. Podjąć decyzję (odrzucić hipotezę zerową)

Terminologia

- **Hipotezą statystyczną** nazywamy dowolne przypuszczenie dotyczące rozkładu prawdopodobieństwa cechy w populacji. Rozważa się hipotezę zerową i alternatywną

- **Testem** hipotezy statystycznej nazywamy postępowanie mające na celu odrzucenie lub nie odrzucenie hipotezy statystycznej. Test to reguła, która przyporządkowuje danym decyzję: 0 nie odrzucamy H_0
  1 odrzucamy

- **Statystyką testową** nazywamy funkcję próbki na podstawie której wnioskuje się o odrzuceniu lub nie hipotezy statystycznej

Hipoteza zerowa i alternatywna

Hipoteza zerowa H_0
- Obowiązuje akceptacja dopóki nie jest obalona
- A, B są niezależne (nie powiązane)
- brak efektu
- $\mu = \mu_0$
- $\mu_1 \leq \mu_2$
- $\mu_1 \geq \mu_2$
- Średnia populacyjna jest równa odpowiedniej wartości

$\leq$
$\geq$

Hipoteza alternatywna H_1
- Wymaga dowodu świadczącego o jej prawdziwości.
- A, B są zależne (powiązane)
- jest efekt
- $\mu \neq \mu_0$
- $\mu_1 > \mu_2$
- $\mu_1 < \mu_2$
- Średnia populacyjna jest nie równa, większa, mniejsza odpowiedniej wartości

• **Błędem I rodzaju** nazywamy błąd wnioskowania polegający na odrzuceniu hipotezy, gdy w rzeczywistości jest ona prawdziwa
• **Błędem II rodzaju** nazywamy błąd wnioskowania polegający na nie odrzuceniu hipotezy, gdy w rzeczywistości jest ona fałszywa
• **Poziomem istotności** nazywamy dowolna liczbę z przedziału (0,1) określająca prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju (α)
• **Mocą testu** nazywamy prawdopodobieństwo odrzucenia testowanej hipotezy, gdy jest ona nieprawdziwa, czyli prawdopodobieństwo nie popełnienia błędu II rodzaju (1- β)

Generalne podejście

- Zbudowanie modelu. Zidentyfikowanie hipotezy H_0 i H_1
- Pobranie próby
- Dobranie testu – reguła decyzyjna kiedy odrzucić H_0 a kiedy nie
- Wnioskowanie
- Podejmowanie decyzji

- nie odrzucamy H_0 (słabe wnioski, H_1 nie będzie wyeliminowana)
- jeśli jest mało prawdopodobne, aby dane pochodziły od H_0 wybieramy H_1 (silne wnioski, H_0 wyeliminowana z przyczyn racjonalnych)

Błędy w Testowaniu Hipotez

		NASZA DECYZJA	
		Akceptujemy H_o ↓	Akceptujemy H_1 ↓
PRAWDA	H_0	Prawidłowa decyzja	**Błąd I rodzaju**
	H_1	**Błąd II rodzaju**	Prawidłowa decyzja

Poziom istotności testu

- Ustalić prawdopodobieństwo omyłkowego odrzucenia $H_{0,}$ gdy jest prawdziwa (błąd I rodzaju)
- **Standardowo** przyjmuje się **5%** co odpowiada **95%** przedziałowi ufności
- Jeżeli **$p<0.05$** to H_0 jest odrzucona a rezultat jest istotny
- Może być test na poziomie 1% (99% przedział ufności). Jeśli $p<0.01$ to H_0 jest odrzucona i mówimy że rezultat jest istotny

p-wartość (poziom krytyczny)

- **p-value (p-wartość)** najmniejszy poziom istotności przy którym test **odrzuca H_0** (taki poziom dla którego **wynik wyszedł istotny).** Często p-wartość jest dostarczana z analizą statystyczną.

  Jeżeli $p=0.021$ to wynik testu jest istotny, ponieważ p jest mniejsze od 0.05 (małe p-value (<0.05) mówi, że nieprawdopodobne jest, aby dane pochodziły z H_0)
- Jeżeli **p-value > 0.05 to wynik testu nieistotny**
- **Odrzucić** H_0 **gdy p wartość jest wystarczająco małe:**

  istotny wynik testu p-value < 0.05
  p-value < 0.01 „wysoko" istotny
  p-value < 0.001 „bardzo wysoko"

Interpretacja

- Jeżeli odrzucamy H_0 i akceptujemy H_1

Dane świadczą przeciw H_0 :

- H_1 jest prawdziwa

lub

- H_0 jest prawdziwa, ale popełniamy

błąd I rodzaju (odrzuca H_0 gdy jest rzeczywiście prawdziwa)

- Silne wnioski
- Istotny wynik
- Mamy „licencję do wyjaśnienia” zaobserwowanych różnic

Interpretacja c.d.

- Jeżeli akceptujemy H_0 to dane nie świadczą przeciw H_0 ale również możemy się mylić
- H_0 jest prawdziwa, lub

  H_1 jest prawdziwa, wtedy popełniamy

  błąd II rodzaju (akceptuje H_0, gdy jest H_1 rzeczywiście prawdziwa)
- Błąd jest możliwy i bardzo prawdopodobny, gdy μ_0 jest blisko μ

  Badanie nie wniosło nic nowego, mało lub niewiele do wyjaśnienia

Test na poziomie istotności α

Jest to taki test, dla którego prawdopodobieństwo decyzji

$$P(odrzucamy H_0) \le \alpha$$

jeśli H_0 prawdziwe.

Odrzucamy hipotezę zerową gdy:

$$p\_value < \alpha$$

Nie trzeba obliczać statystyki testowej, wystarczy porównać p-wartość (p-value) z poziomem istotności.

Test oparty o wartość p (p-wartość)

Powróćmy do przykładu (paczkowanie masła)

Testowanie $H_0: \mu = 250$

przeciw $H_1: \mu \neq 250$

Statystyka testowa $\dfrac{|\bar{X} - 250|}{\frac{5}{\sqrt{10}}} = \dfrac{6 \cdot \sqrt{10}}{5} = 3.79$

p-wartość to jest prawdopodobieństwo, że

$$P(|Z| > 3.79) = 1 - 0.99992 = 0.00008$$

p-value mówi, jak często wystąpiłaby wartość większa od krytycznej gdyby hipoteza zerowa była prawdziwa. Dla dobrej maszyny praktycznie się nie wystąpi takie zdarzenie (mała p-wartość) a więc mamy silne podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej.

Testy istotności to testy pozwalające odrzucić sprawdzaną hipotezę z małym ryzykiem popełnienia błędu mierzonym poziomem istotności α

Termin „istotność" wywodzi się ze specyfiki testu.

Za pomocą określonych statystyk w modelu sprawdza się hipotezę, dając odpowiedź na pytanie,

czy prawdopodobieństwo zajścia pewnego zdarzenia jest istotnie małe, jeśli tak to hipotezę zerową odrzuca się.

Przykłady różnych testów istotności dotyczących wartości oczekiwanej populacji

1.Testowanie średniej populacji

Założenie: $X_1, X_2, ...X_n$ z $N(\mu, \sigma^2)$

znane σ

nieznana μ

Znana, ustalona liczba (nie z danych) taka, że testujemy w stosunku do niej średnią populacji

Czy $\mu = \mu_0$?

Hipotezy

H $_0$: $\mu = \mu_0$

H $_1$: $\mu \neq \mu_0$

Statystyka testowa:

$$\frac{\left|\bar{X} - \mu_0\right|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = |z|$$

Odrzucamy H$_0$ jeśli $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ kwantyl $N(0,1^2)$

2.Testowanie średniej populacji

Założenie: $X_1, X_2, ...X_n$ z $N(\mu, \sigma^2)$

znane σ

nieznana μ

Znana, ustalona liczba (nie z danych) taka, że testujemy w stosunku do niej średnią populacji

Hipotezy

$H_0 : \mu \leq \mu_0$

$H_1 : \mu > \mu_0$

Statystyka testowa:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Odrzucamy H_0 jeśli $z > z_{1-\alpha}$ kwantyl $N(0,1^2)$

3.Testowanie średniej populacji

Założenie: $X_1, X_2, ...X_n$ z $N(\mu, \sigma^2)$

nieznane σ jak nieznane to zastępujemy estymatorem S

nieznana μ

Znana, ustalona liczba (nie z danych - norma) taka, że testujemy w stosunku do niej średnią populacji

Czy $\mu = \mu_0$?

Hipotezy

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$

Statystyka testowa:

$$|T| = \frac{|\overline{X} - \mu_0|}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Odrzucamy H_0 jeśli $|T| > t_{\alpha(n-1)}$ Wartość krytyczna rozkładu t-Studenta

To co obliczymy w module porównujemy z tablicami

4.Testowanie średniej populacji

Założenie:

$X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ z $N(\mu, \sigma^2)$

nieznane σ jak nieznane to zastępujemy estymatorem S

nieznana μ

Znana, ustalona liczba (nie z danych) taka, że testujemy w stosunku do niej średnią populacji

Hipotezy

$$H_0 : \mu \le \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

Statystyka testowa:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Odrzucamy H_0 jeśli $T > t_{2\alpha, (n-1)}$ Wartość krytyczna rozkładu t-Studenta

Zagadnienia testowania hipotez (testy istotności)

- Porównanie z „normą”
- Porównanie dwóch populacji
- Porównanie r populacji

Inne testy istotności

- Test przybliżony dla proporcji (frakcji, odsetka)

Przykład.
Norma przewiduje, że 10% produkcji może być wadliwe. Wśród 100 wyrobów znalazło się 15 wadliwych. Czy ten wynik jest zgodny z normą? Przyjąć poziom istotności 0.05.
X - cecha jakościowa, dwuwartościowa (0,1).
Wiemy już jak jest opisany rozkład prawdopodobieństwa cechy dwuwartościowej. Wystarczy podać Prawdopodobieństwo, że cecha jest wybrakowana.

$$P(X = 1) = p$$

$$X = \begin{cases} 0 & \text{wyrób dobry} \\ 1 & \text{wyrób wadliwy} \end{cases}$$

Hipoteza zerowa – produkcja zgodna z normą:

$$H_0 : p = 0.10 \qquad \alpha = 0.05$$

$$P(X = 1) = p$$

$$H_0 : p = p_0$$

p_0 Wyspecyfikowana liczba, którą bierzemy z normy lub ogólnie przyjętych przekonań

Dane: Próbka n-elementowa, k -"jedynek"

jedynka oznacza produkt wadliwy

n=100

k=15

$$\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{15}{100} = 0.15$$

Testujemy $H_0 : p = p_0$

przeciwko $H_1 : p > p_0$

Albo nie kwestionujemy towaru albo kwestionujemy bo przekracza normę

Statystyka testowa Z

$$Z = \sqrt{n}\,\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}}$$

Test na poziomie α odrzucamy H_0 jeżeli $Z > z_{1-\alpha}$

$z_{1-\alpha}$ kwantyl rozkładu $N(0,1^2)$

Obliczenia

$$Z=\sqrt{n}\,\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$$

$$Z=\sqrt{100}\,\frac{0.15-0.10}{\sqrt{0.10\cdot 0.90}}=1.6667$$

$$z_{1-\alpha}=z_{1-0.05}=z_{0.95}=1.645$$

$$Z>z_{1-\alpha}$$

Decyzja. Odrzucamy H_0 na rzecz H_1.
Obliczone Z przekracza wartość krytyczną.
„Wadliwość jest istotnie wyższa od 10%" lub „udowodniliśmy statystycznie, że p>10% na poziomie istotności $\alpha=0.05$ "

Jak to liczy kalkulator?
Kalkulator pyta o rodzaj hipotezy – trzeba wprowadzić
p>0.10, n=100, k=15.
Kalkulator rysuje rozkład normalny. Wylicza Z =1.6666 i umieszcza na rysunku. Podaje prawdopodobieństwo na prawo od tego wyliczonego Z=1.6666 p-value=0.0475

Potrafimy znaleźć p-value w tablicach rozkładu normalnego
Szukamy Z=1.67 odpowiada wartość 0.95254 (pole na lewo)
Gdy odejmiemy od 1 -0.95254 = 0.0475 (pole na prawo).

Interpretacja - p-value jest to prawdopodobieństwo uzyskania 15 lub więcej braków przy założeniu, że wadliwość jest 10 %, czyli przy założeniu H_0. Mówi na ile „dziwny" jest wynik.
Mając doskonałą linię produkcyjną, która ma 10% wadliwości i w skrzyniach po 100 detali to, w 4 lub 5 skrzyniach na 100 skrzyń mielibyśmy 15 lub więcej braków. Decyzję podejmujemy na podstawie p-value.

$p\_value<\alpha$ odrzucamy $H_0: p=p_0$

Przykład. Test dwustronny

$$H_0 : p = p_0 \quad = 0.10 \qquad \alpha = 0.05$$

$$H_1 : p \neq p_0$$

p_0 wyspecyfikowana liczba, którą bierzemy z normy lub ogólnie przyjętych przekonań

Dane: Próbka n-elementowa, k -"jedynek" jedynka oznacza produkt wadliwy

n=100
k=15

$$\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{15}{100} = 0.15$$

Z=1.666

Test na poziomie $\alpha = 0.05$ odrzucamy H_0 jeżeli

$$|Z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{1-\frac{0.05}{2}} = z_{1-0.025} = z_{0.975} = 1.96$$

Nie odrzucamy hipotezy zerowej

Porównanie dwóch populacji - test jednostronny

Pośród n_1 =1200 mieszkańców miast k_1=40 chorych
Pośród n_2=1500 mieszkańców wsi k_2=100 chorych
Pytanie badawcze, czy na wsi ludzie częściej chorują na gruźlicę?

p_1 w I populacji — p_2 w II populacji

$P(X=1)=p_1$ — $P(X=1)=p_2$

p_1% chorujących w mieście — p_2% chorujących na wsi

Hipoteza:

H_0: $p_1=p_2$ przeciw H_1: $p_1<p_2$

Dane:

$$\hat{p}_1 = \frac{k_1}{n_1} = \frac{40}{1200} \qquad \hat{p}_2 = \frac{k_2}{n_2} = \frac{100}{1500}$$

ogólne

$$\hat{p} = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2} = \frac{40+100}{1200+1500} = \frac{140}{2700} = 5.2\%$$

Porównanie dwóch populacji – test jednostronny c.d.

$\hat{p} = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2}$ Ogólny estymator, liczony przy założeniu, że H_0 prawdziwa ogólna zachorowalność nie ma znaczenia, czy na wsi, czy w mieście.

Statystyka testowa:

$$Z = \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}} \bullet \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}$$ =-3.882=-Z

Odrzucamy Ho jeśli $Z < -z_{1-\alpha}$

$$-z_{1-\alpha} = -z_{1-0.05} = -z_{0.95} = -1.645$$

Dla Z=3.88 pole=0.9999 to dla –Z=1-0.9995=0.0005 p value

Porównanie dwóch populacji – test dwustronny

Test dwustronny.

p_1 w I populacji — p_2 w II populacji

$P(X=1)=p_1$ — $P(X=1)=p_2$

p_1% chorujących w mieście — p_2% chorujących na wsi

Hipoteza:

H_0: $p_1=p_2$ przeciw H_1: $p_1 \neq p_2$

Dane: $\hat{p}_1 = \frac{k_1}{n_1} = \frac{40}{1200}$ $\hat{p}_2 = \frac{k_2}{n_2} = \frac{100}{1500}$

ogólne $\hat{p} = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2} = \frac{40+100}{1200+1500} = \frac{140}{2700} = 5.2\%$

Odrzucamy Ho jeśli $|Z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$