Rozkłady prawdopodobieństwa zmiennych losowych

Rozkład dwumianowy

Rozkład normalny

Marta Zalewska

Zmienna losowa dyskretna (skokowa) jest to zmienna, której zbiór wartości jest skończony lub przeliczalny.
Jeżeli x_1 i x_2 są kolejnymi wartościami zmiennej losowej dyskretnej, to nie przyjmuje ona żadnych wartości między x_1 i x_2.

Przykłady: wynik rzutu kostką, liczba bakterii, ilość studentów.

Zmienna losowa ciągła jest to zmienna przyjmująca wszystkie wartości z pewnego przedziału (najczęściej zbioru liczb rzeczywistych).
Jeżeli x_1 i x_2 są dwiema wartościami zmiennej losowej ciągłej, to może ona przyjąć dowolną wartość między x_1 i x_2.

Przykłady: wzrost, ciężar, temperatura

Przykład 1. Dwa rzuty monetą. Oznaczamy liczbę orłów przez S. Wartości zmiennej losowej S i rozkład prawdopodobieństwa na przestrzeni próbkowej przedstawia tabelka:

	OO	RO	OR	RR
	1/4	1/4	1/4	1/4
	2	1	1	0

Wynikowi doświadczenia odpowiada liczba.

Definicja. Załóżmy, że zmienna losowa X przyjmuje wartości ze zbioru

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbf{R}$$

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X możemy przedstawić przy pomocy tabelki:

wartość	x_1	x_2	…	x_n
prawdopodobieństwo	f_1	f_2	…	f_n

gdzie $f_i = P(X = x_i)$

Dystrybuanta jest graficznym przedstawieniem tabelki „skumulowanych" prawdopodobieństw.

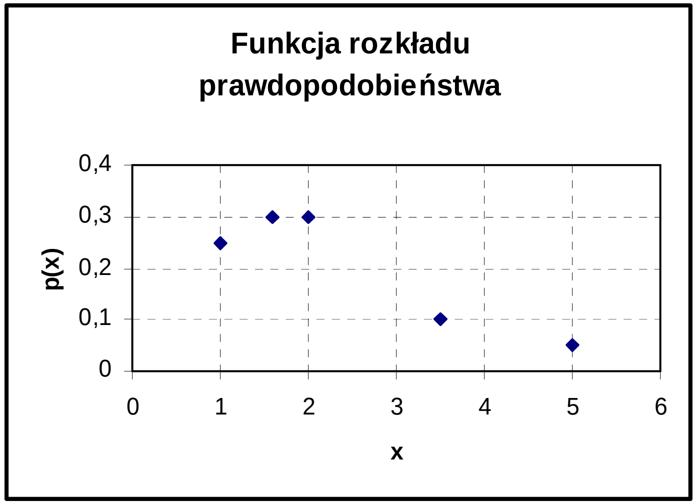
gdzie $f_i = P(X = x_i)$

wartość	x_1	x_2	…	x_n
prawdopodobieństwo	f_1	f_2	…	f_n
pr-stwo skumulowane	f_1	f_1+f_2	….	$f_1+f_2+\ldots+f_n$

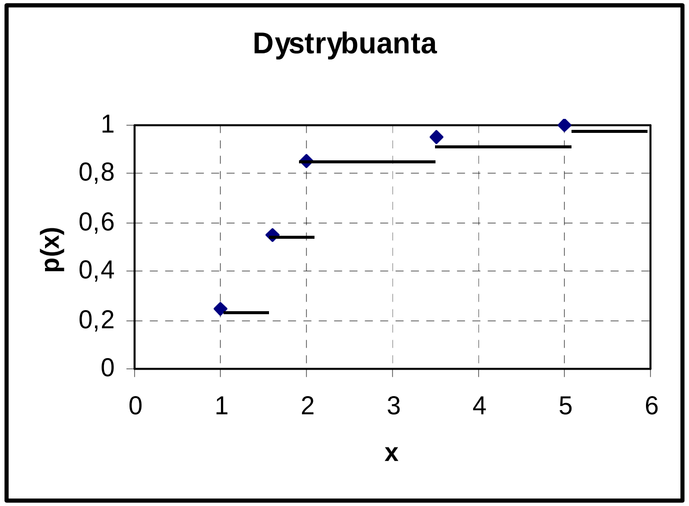
Ustawiamy ciąg $x_1 < x_2 < \ldots$

Przykład 2. Zmienna losowa dyskretna

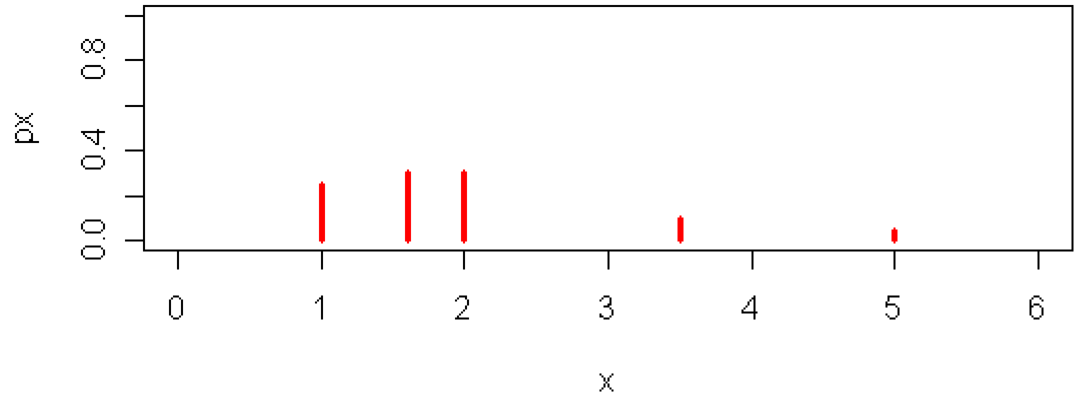
x	p(x)	skumul.
1	0,25	0,25
1,6	0,3	0,55
2	0,3	0,85
3,5	0,1	0,95
5	0,05	1



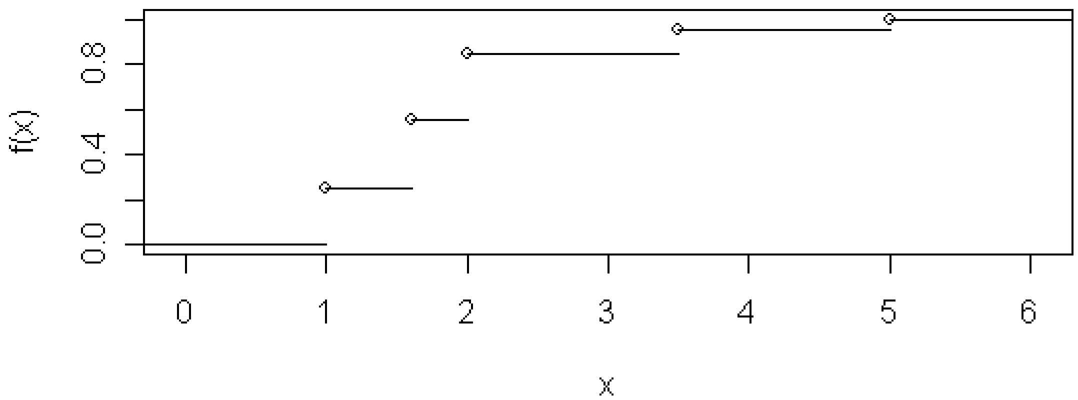
Funkcję rozkładu prawdopodobieństwa przedstawiamy graficznie jako „pionowe słupki” dystrybuantę jako „poziome linie”



Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej dyskretnej



Dystrybuanta zmiennej losowej dyskretnej



Dystrybuanta rozkładu zmiennej losowej X jest to funkcja :

$$F(x) = P(X \le x)$$

Własności dystrybuanty:

1. $0 \le F(x) \le 1$
2. $F(-\infty) = 0, \qquad F(\infty) = 1$
3. **Funkcją niemalejącą, prawostronnie ciągłą**
4. $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$
5. **P(X>x) = 1 - F(x)** ***F(-x) = 1 - F(x)***

Wróćmy do przykładu 1.
Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej S przedstawia tabelka:

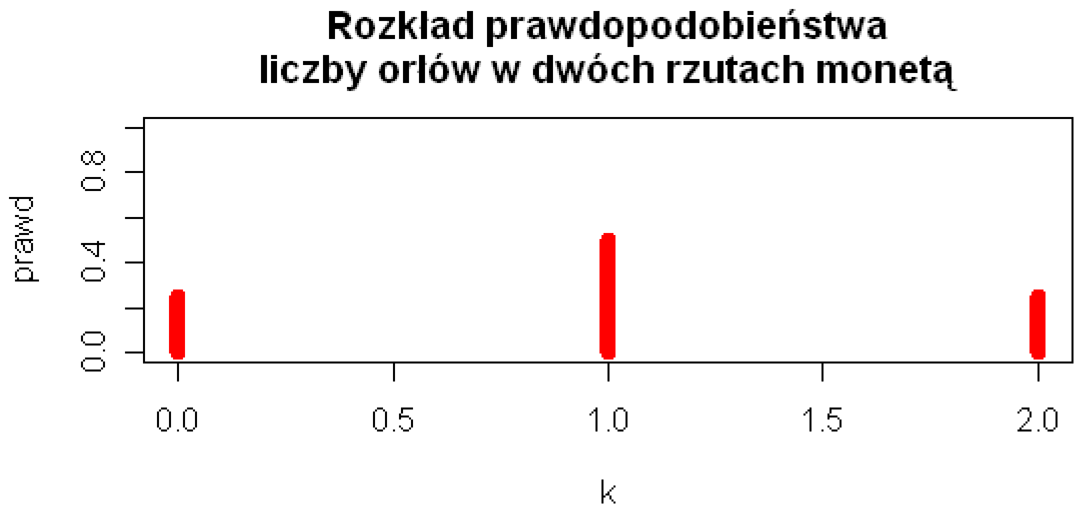
a	0	1	2
P(S=a)	1/4	1/2	1/4
P(S<=a)	1/4	1/4+1/2	1/4+1/2+1/4

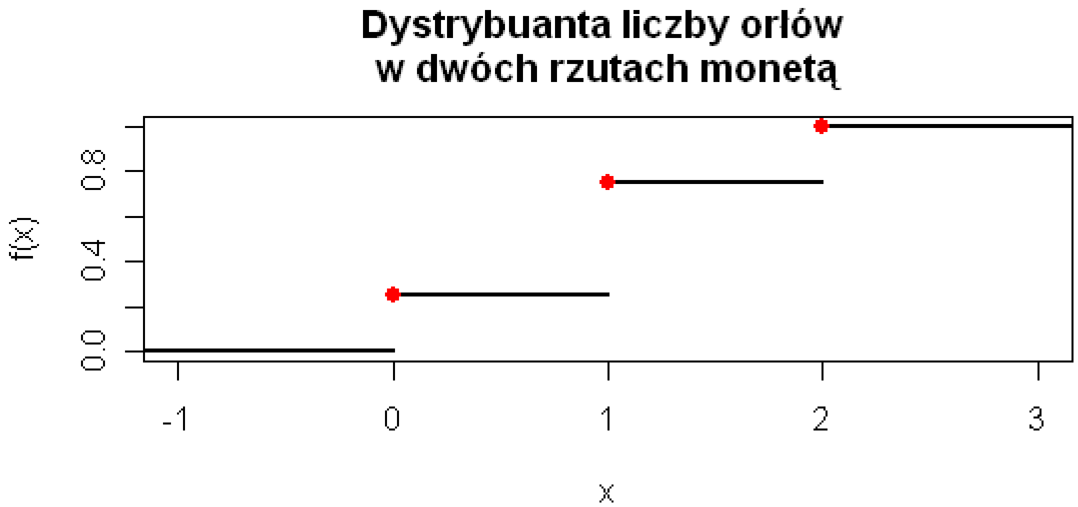
Dystrybuanta dana jest wzorem

$$P(S \le a) = \begin{cases} 0 & dla \quad a < 0 \\ 1/4 & dla \quad 0 \le a < 1 \\ 3/4 & dla \quad 1 \le a < 2 \\ 1 & dla \quad 2 \le a \end{cases}$$

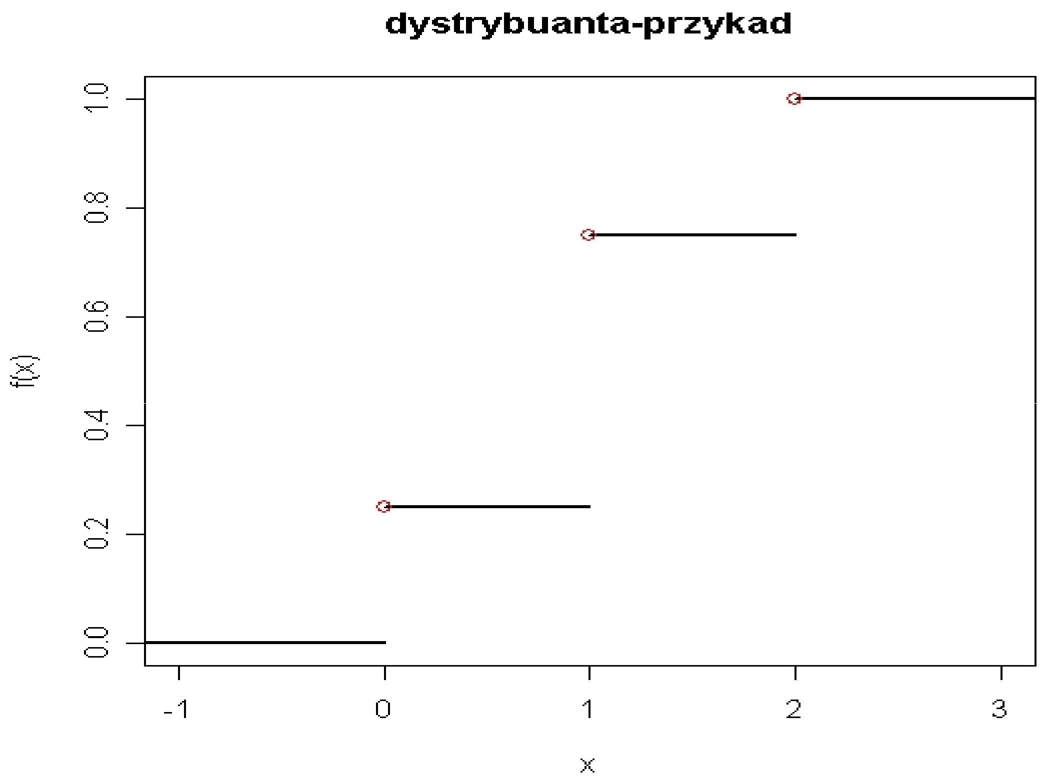
Wykres dystrybuanty ma postać „schodków”

$a_1 < a_2 < \dots$


Rozkład prawdopodobieństwa
liczby orłów w dwóch rzutach monetą
prawd
0.0
0.4
0.8
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
k


Dystrybuanta liczby orłów
w dwóch rzutach monetą
f(x)
0.0
0.4
0.8
-1
0
1
2
3
x

Graficzne przedstawienie tabelki „skumulowanych" prawdopodobieństw



Wysokość schodka w 1 to P(X=1)

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$P(0 < X \leq 1) = F(1) - F(0) = 0.75 - 0.25 = 0.5$$

Charakterystyki liczbowe zmiennych losowych

Wartość przeciętna (oczekiwana, średnia) EX zmiennej losowej X jest liczbą charakteryzująca położenie zbioru jej wartości

$$EX = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \\ \int x f(x) dx \end{cases}$$

Wariancją D^2X zmiennej losowej jest liczbą charakteryzującą rozrzut zbioru jej wartości wokół średniej EX (drugi moment centralny)

$$D^2X = \begin{cases} \sum (x_i - EX)^2 p_i \\ \int (x - EX)^2 f(x) dx \end{cases}$$

$$D^2X = Var(X)$$

Charakterystyki liczbowe zmiennych losowych

Definicja. Załóżmy, że X jest dyskretną zmienną losową o wartościach $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
Wartością przeciętną (oczekiwaną, średnią) zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

gdzie $f_i = P(X = x_i)$

Przykład. Jeśli rozkład zmiennej losowej X jest dany tabelką

x_i	-5	2	5	10
f_i	0.2	0.5	0.2	0.1

to EX= (-5) * 0.2 + 2 * 0.5 + 5* 0.2 + 10*0.1 = 2

Jeśli X jest dyskretną zmienna losową, która przyjmuje wartości $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, to

$$D^2 X = Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - EX)^2 f_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f_i - EX^2$$

x_i	-5	2	5	10
f_i	0.2	0.5	0.2	0.1

Przykład. Dla zmiennej losowej X z poprzedniego przykładu, EX = 2. Mamy więc

Var(X) = $(-5-2)^2 * 0.2 + (2-2)^2 * 0.5 + (5-2)^2 * 0.2 + (10-2)^2 * 0.1 = 18$

lub

$(-5)^2 * 0.2 + 2^2 * 0.5 + (5)^2 * 0.2 + (10)^2 * 0.1 - 2^2 = 22 - 4 = 18$

Oczywiście, odchylenie standardowe DX

$$DX = \sqrt{18} = 4.243$$

Własności wartości przeciętnej i wariancji.

Niech a będzie liczbą , zaś X i Y zmiennymi losowymi

$$E(X+a) = EX+a$$

$$E(X+Y) = EX+EY$$

$$E(aX) = aEX$$

$$D^2(X+a)=Var(X+a) = Var(X-a)=Var(X)$$

$$D^2(aX)=Var(aX) = a^2Var(X)$$

$$D(aX) = |a|DX$$

jeśli zmienne są niezależne to

$$Var(X+Y)= Var(X) + Var(Y)$$

Prawo wielkich liczb:

Jeśli X_1, X_2, X_3… są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie takim samym jak X to

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \to EX$$

gdy n dąży do nieskończoności

Jeśli X jest zmienną losową o rozkładzie normalnym

$$N(\mu,\sigma^2)$$

To zmienna losowa $\overline{X}$ ma rozkład:

$$\overline{X} \sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$$

Uśredniony wynik n pomiarów ma odchylenie standardowe

$$D\overline{X} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Jeśli uśrednimy, powiedzmy 100 niezależnych pomiarów, to dokładność wyniku zwiększy się

$$\sqrt{100} = 10$$

dziesięć razy w porównaniu z dokładnością pojedynczego pomiaru.

Schemat Bernoulliego

- Powtarzamy wielokrotnie (*n* razy) niezależnie (wynik następnego doświadczenia nie zależy od wyników poprzednich) doświadczenie losowe, w którym możliwe są dwa wyniki umownie nazwane „sukces” i „porażka”. Prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczym doświadczeniu oznaczymy przez p, porażki $q = 1-p$

Przykłady

- Losowanie z urny **ze zwracaniem** (w urnie *b*-kul białych i *c* kul czarnych) „kula biała”=sukces, „kula czarna” =porażka ; $p=b/(b+c)$, $q=c/(b+c)$
- Rzuty monetą „orzeł”=sukces, „reszka”=porażka

  $p=q=1/2$
- Rzuty kostką „szóstka”= sukces, „inny wynik”=porażka

  $p=1/6$, $q=5/6$
- Płeć noworodków „dziewczynka”=sukces, „chłopiec” =porażka, statystyki pokazują p=0.483, q=0.517
- Losowanie **bez zwracania nie jest** schematem Bernoulliego bo wynik następnego losowania zależy do wyniku poprzedniego

Twierdzenie. W schemacie Bernoulliego, prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie *k* sukcesów (i *n-k* porażek) jest równe

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Rozkład prawdopodobieństwa opisany tym wzorem nazywa się dwumianowy

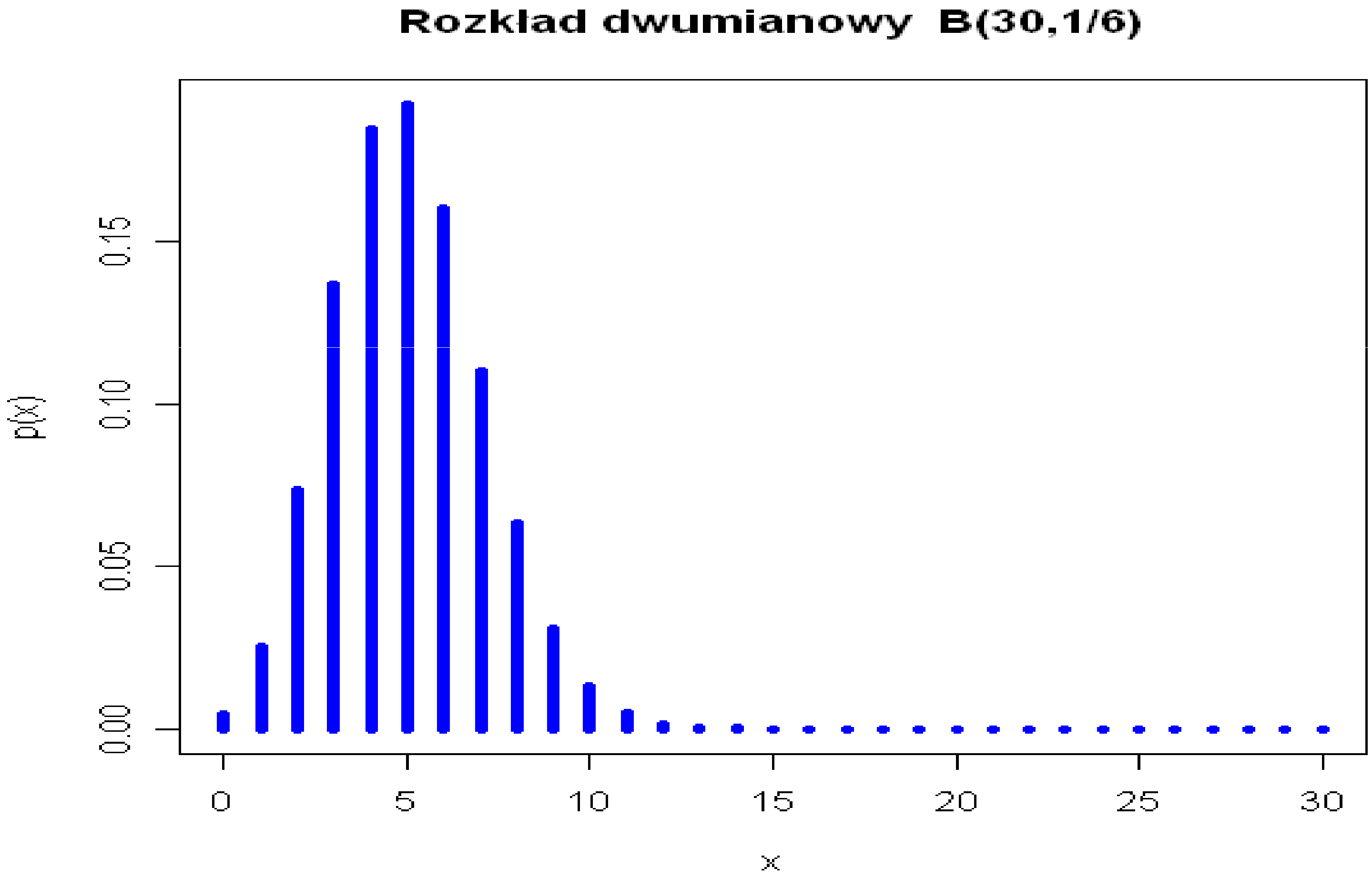
Przykład. (Wielokrotne rzuty kostką) n=30 razy rzucamy kostką. Prawdopodobieństwo wyrzucenia „szóstki” w jednym rzucie jest równe p=1/6. Chcemy obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wśród 30 rzutów pojawi się dokładnie k =5 razy „szóstka”.

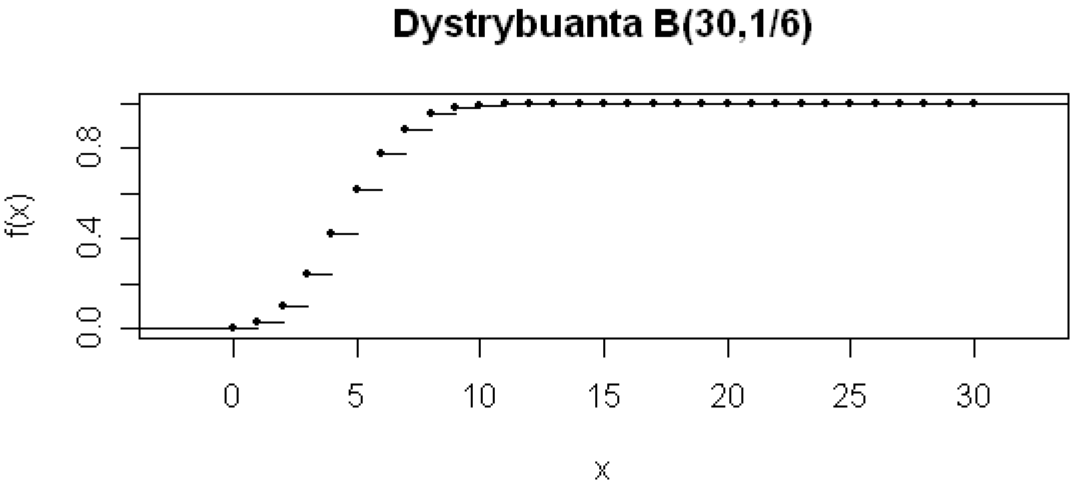
$$\binom{30}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{25} \approx 0.1921$$

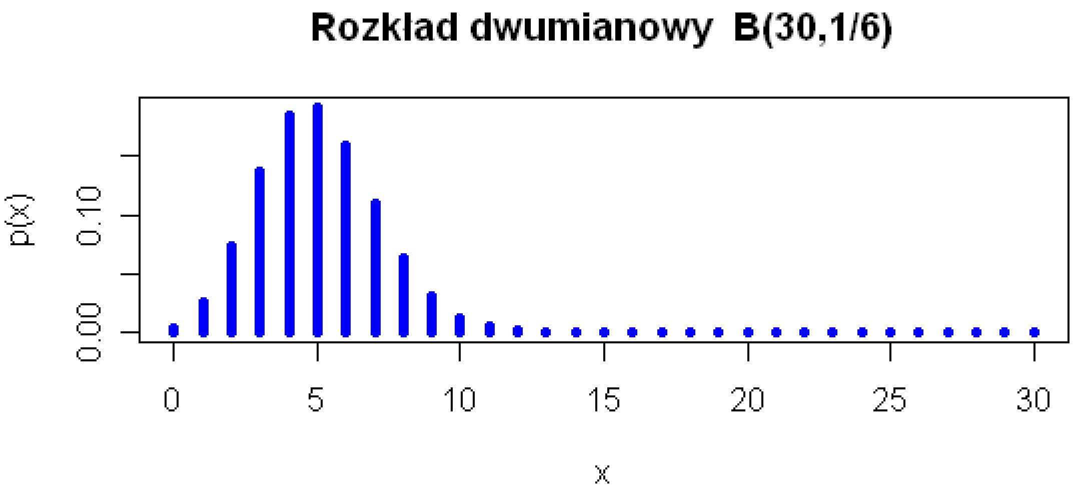
(n=30, k=5, p=1/6)

Najbardziej prawdopodobną liczbą „szóstek” jest 5

$P(X=5)=0.1921$




Dystrybuanta B(30,1/6)
f(x)
0.0
0.4
0.8
0
5
10
15
20
25
30
x

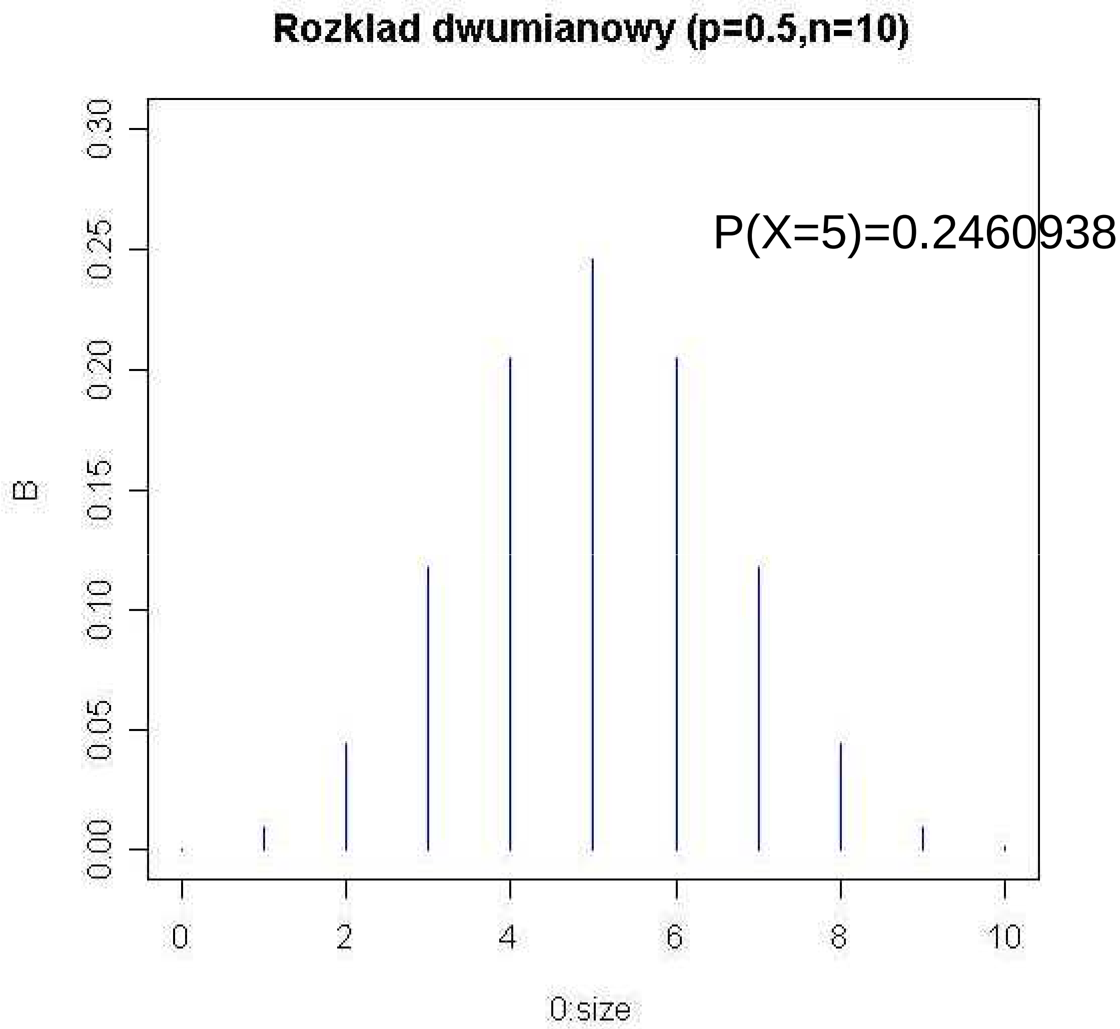

Rozkład dwumianowy B(30,1/6)
p(x)
0.00
0.10
0
5
10
15
20
25
30
x

Przykład. Jakie jest prawdopodobieństwo (P) wylosowania z populacji (w której proporcja kobiet wynosi **p=1/2**) dokładnie k=0,1,2,3,…n kobiet?

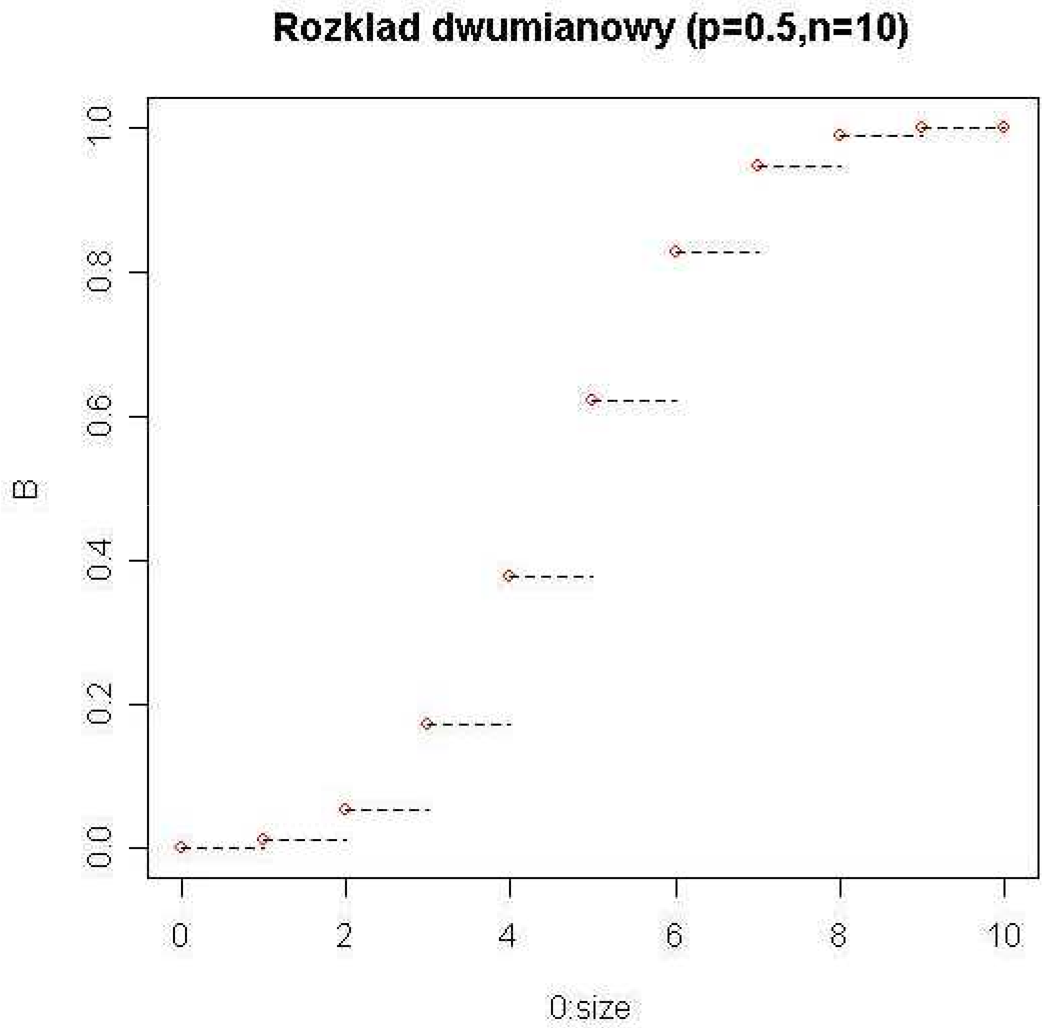
$$P(X = k) = \binom{n}{k}(1/2)^k (1-1/2)^{n-k} = \binom{n}{k} 1/2^n$$

Szansa, że wsród n=10 noworodków będzie dokładnie k=5 dziewczynek jest w przybliżeniu 25% bo:

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} 1/2^{10} = 252/1024 = 0.2461$$

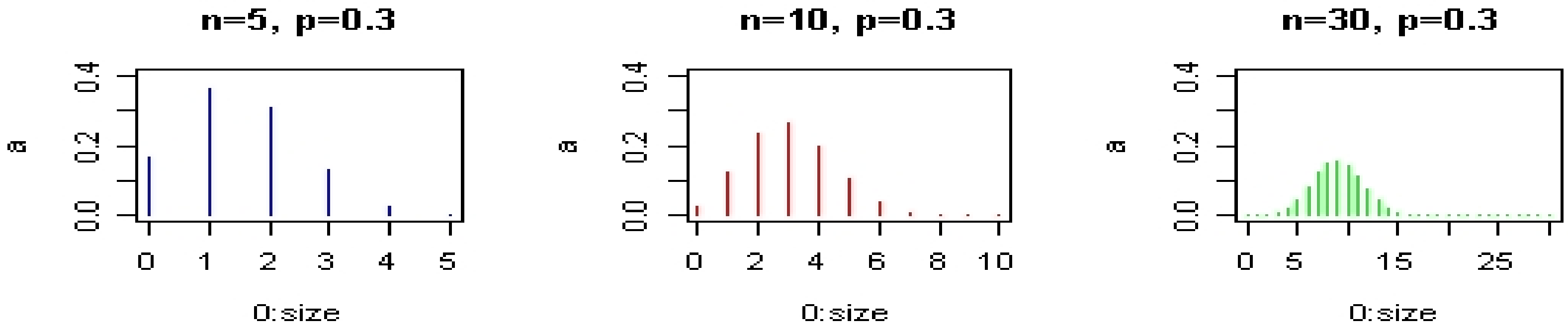

Rozklad dwumianowy (p=0.5,n=10)
P(X=5)=0.2460938
B
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0.30
0
2
4
6
8
10
0:size

Dystrybuanta rozkładu dwumianowego

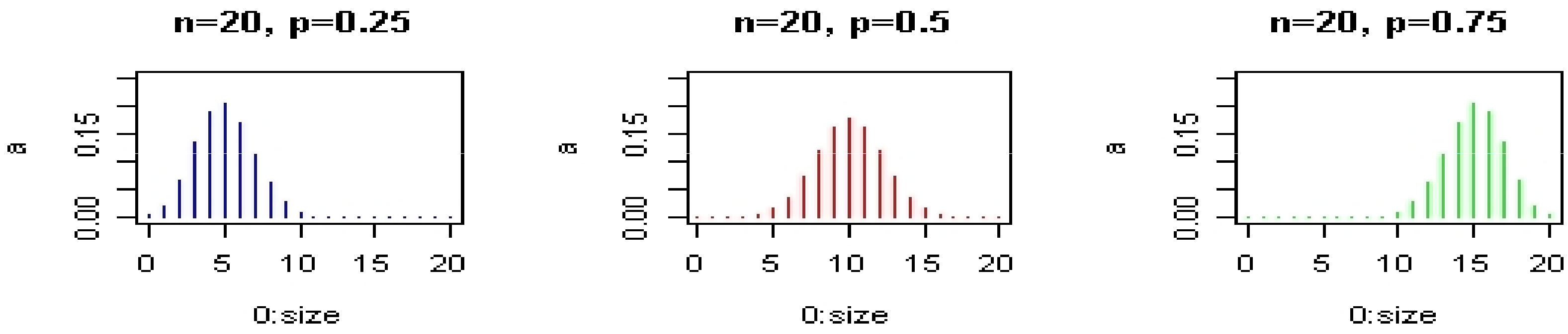


Rozkłady dwumianowe

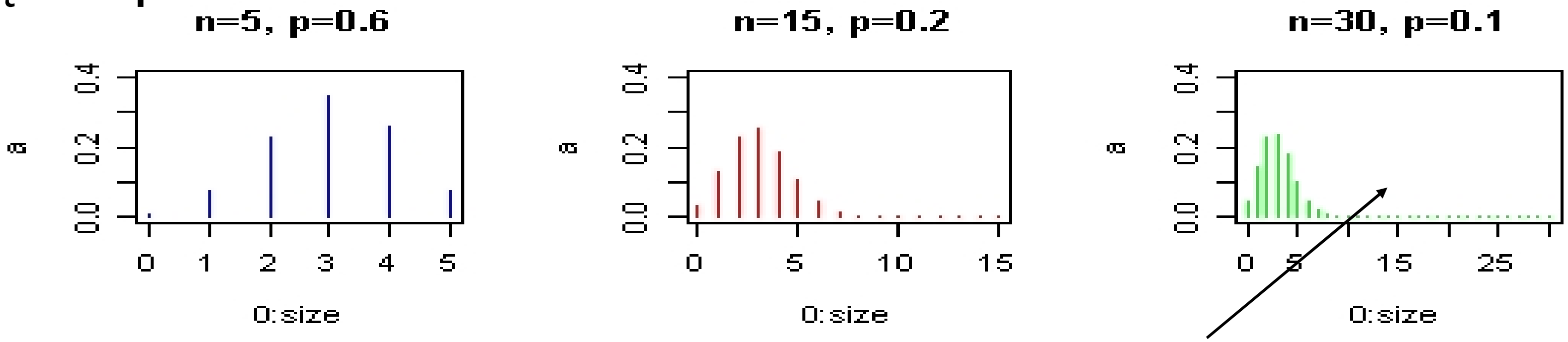
Ustalone p i różne n



Ustalone n i różne p



Związek n*p = const.



Prawie rozkład Po(3)

Rozkład Poissona

Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład Poissona Po(λ) (P(λ)) z parametrem λ (lambda), λ>0 jeśli jej funkcja prawdopodobieństwa jest postaci

$$P(k,\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

dla $k \in N_0 = N \cup \{0\}$

k =0,1,2,….

Przykłady: ilość wad na m^2 produkowanego materiału, ilość wypadków w jednostce czasu, (dla zdarzeń rzadkich)

$$B(n, p) \to Po(\lambda)$$

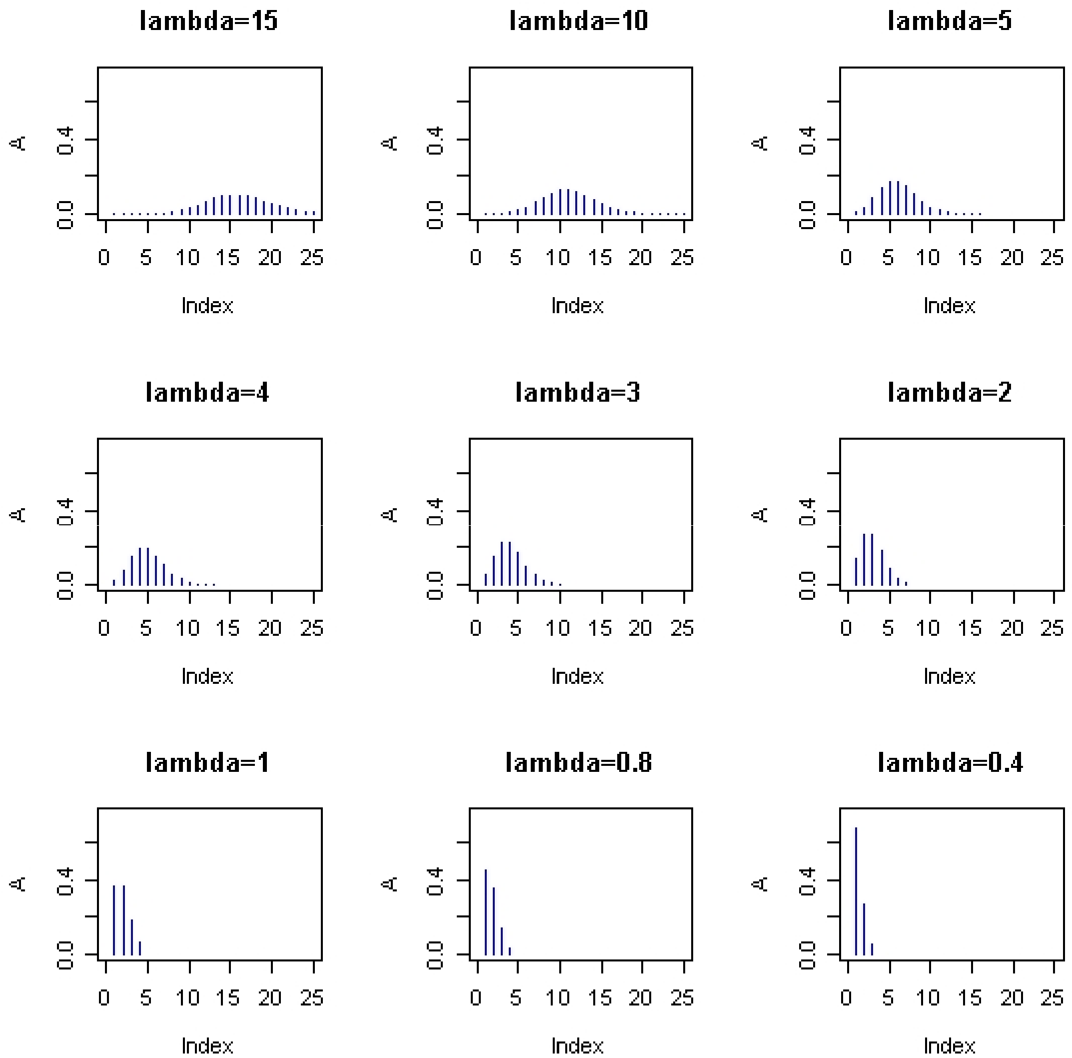
$$P(k) = \binom{n}{k} p^{k} (1 - p)^{n-k} \to e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k}}{k!}$$

Jeśli

$$n \to \infty$$

$$p \to 0$$

$$np \to \lambda$$


lambda=15
lambda=10
lambda=5
lambda=4
lambda=3
lambda=2
lambda=1
lambda=0.8
lambda=0.4
A
Index
0.0
0.4
0 5 10 15 20 25

Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa

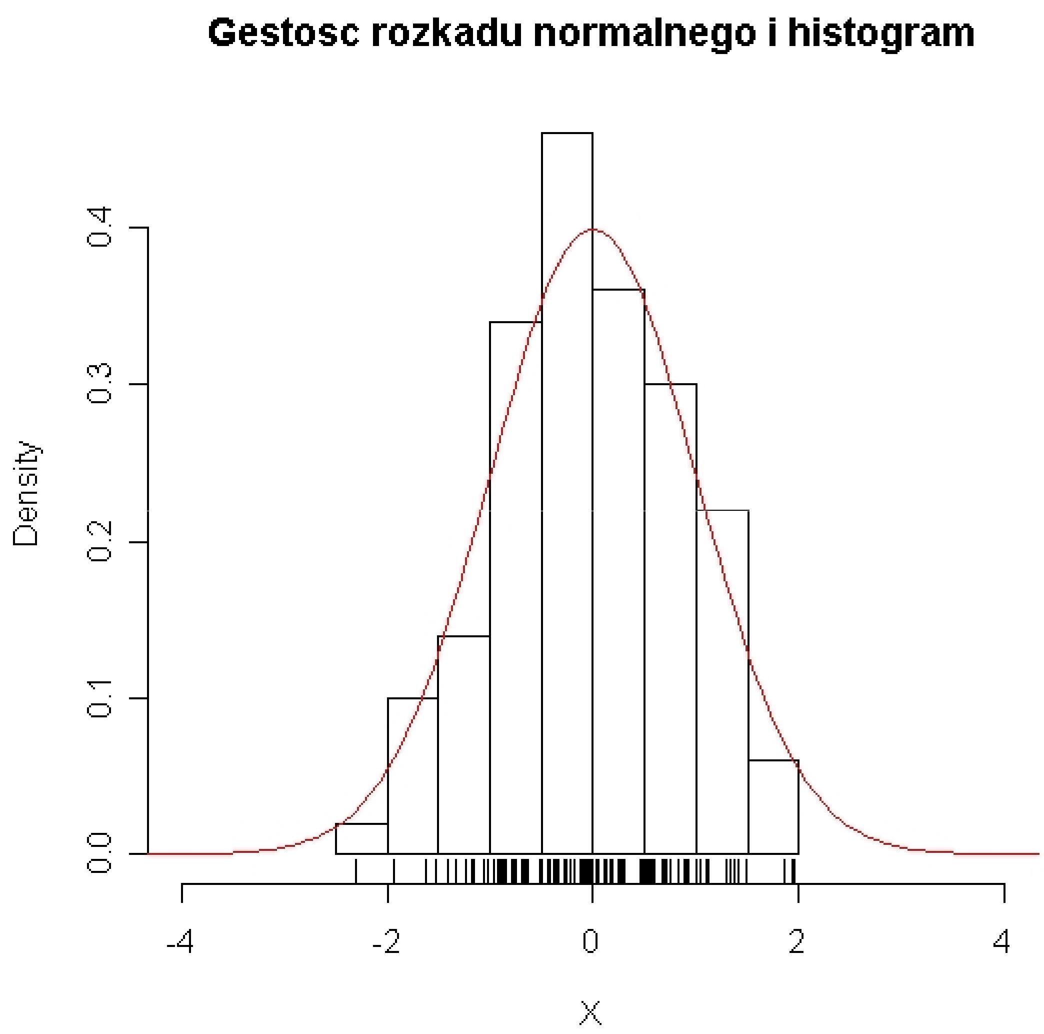
- Definicja. Funkcja f(x) jest gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej X jeśli

P (a < X < b) =

$$P((a,b)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

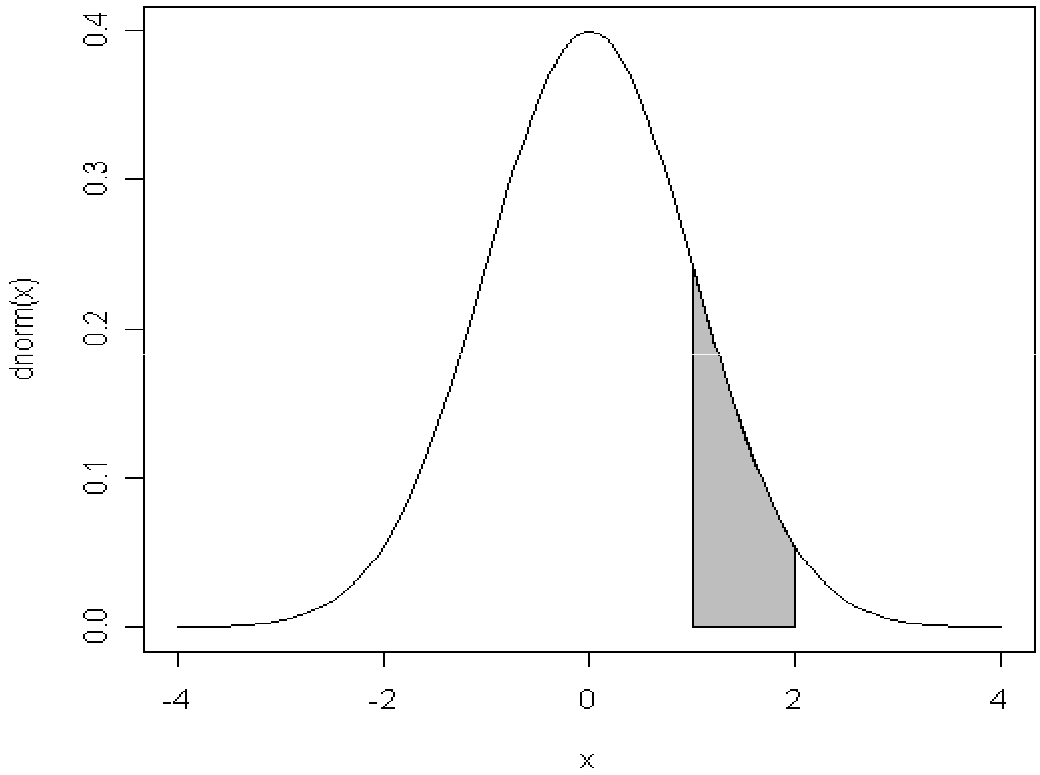
Własności: f(x) > = 0

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$


Gestosc rozkadu normalnego i histogram
Density
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
-4
-2
0
2
4
X

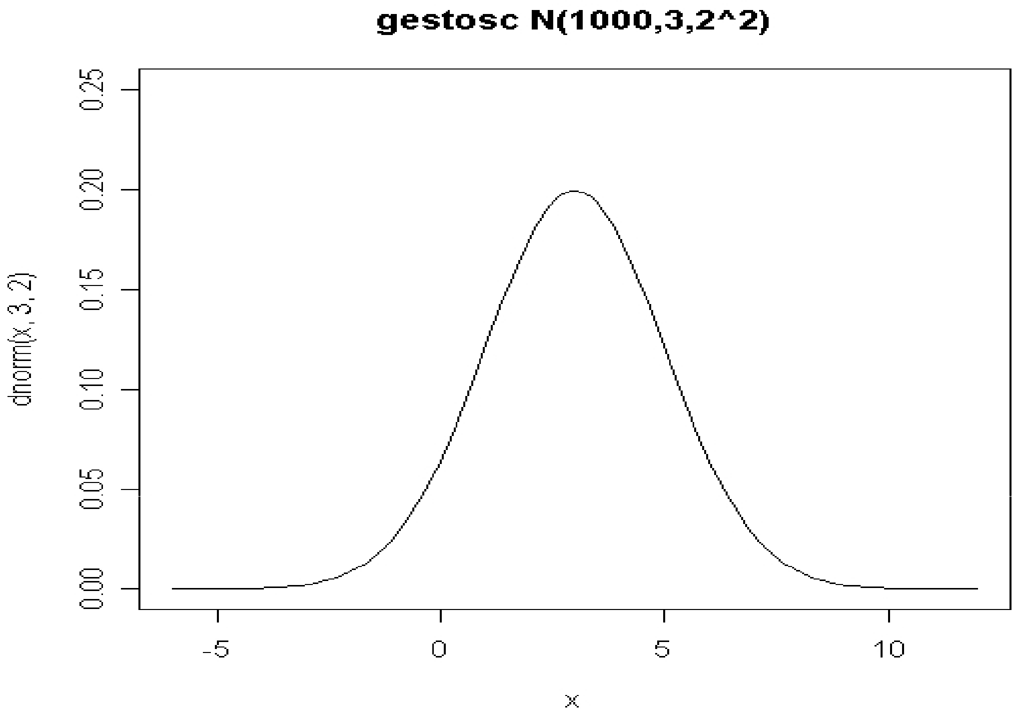
Gęstość rozkładu prawdopodobieństwa *f(x)*

$$P((a,b)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$



Pole zacienionego obszaru przedstawia prawdopodobieństwo pojawienia się wyniku w przedziale (a,b), a=1, b=2

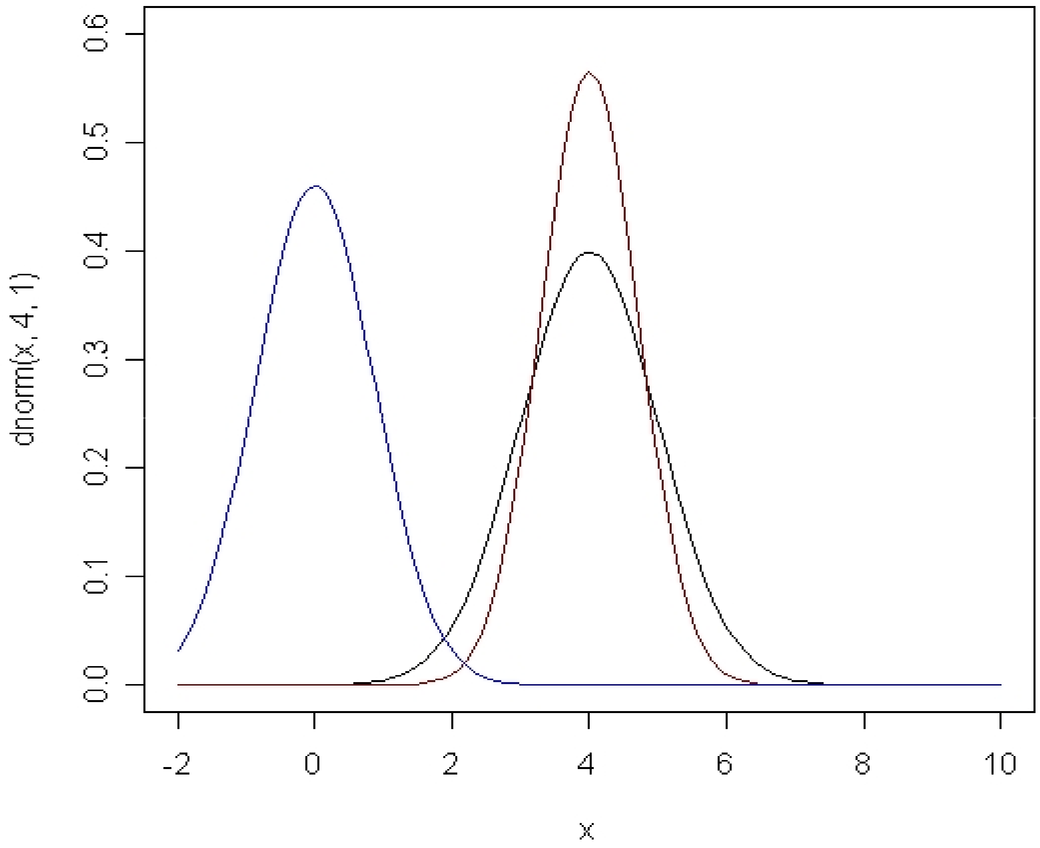
Gęstość rozkładu normalnego **X ~** $N(\mu, \sigma^2)$



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

Gęstości rozkładów normalnych zmiennych losowych *X, Y, Z*

$$N(\mu, \sigma^2)$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

S1

Slajd 36

S1 czarny (4,1)
czerwiny(4,0.5)
niebieski (0,0.75)
SPCSK; 2006-10-20

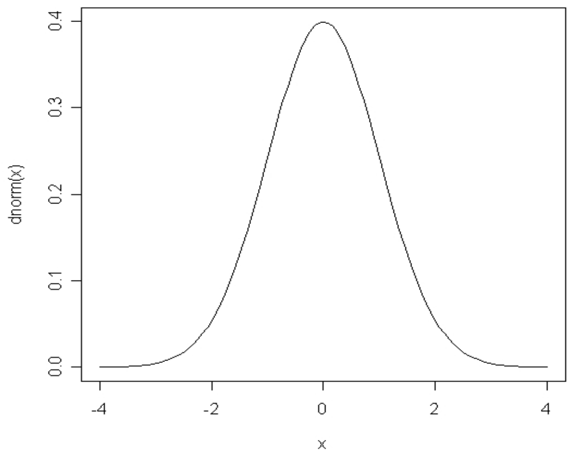
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Jeśli *F(x)* jest dystrybuantą dowolnego rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ **to zachodzi**

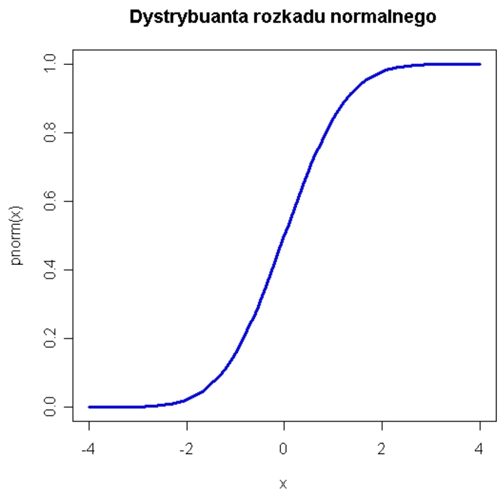
$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Zmienna losowa o rozkładzie normalnym $N(0,1^2)$

Funkcja gęstości

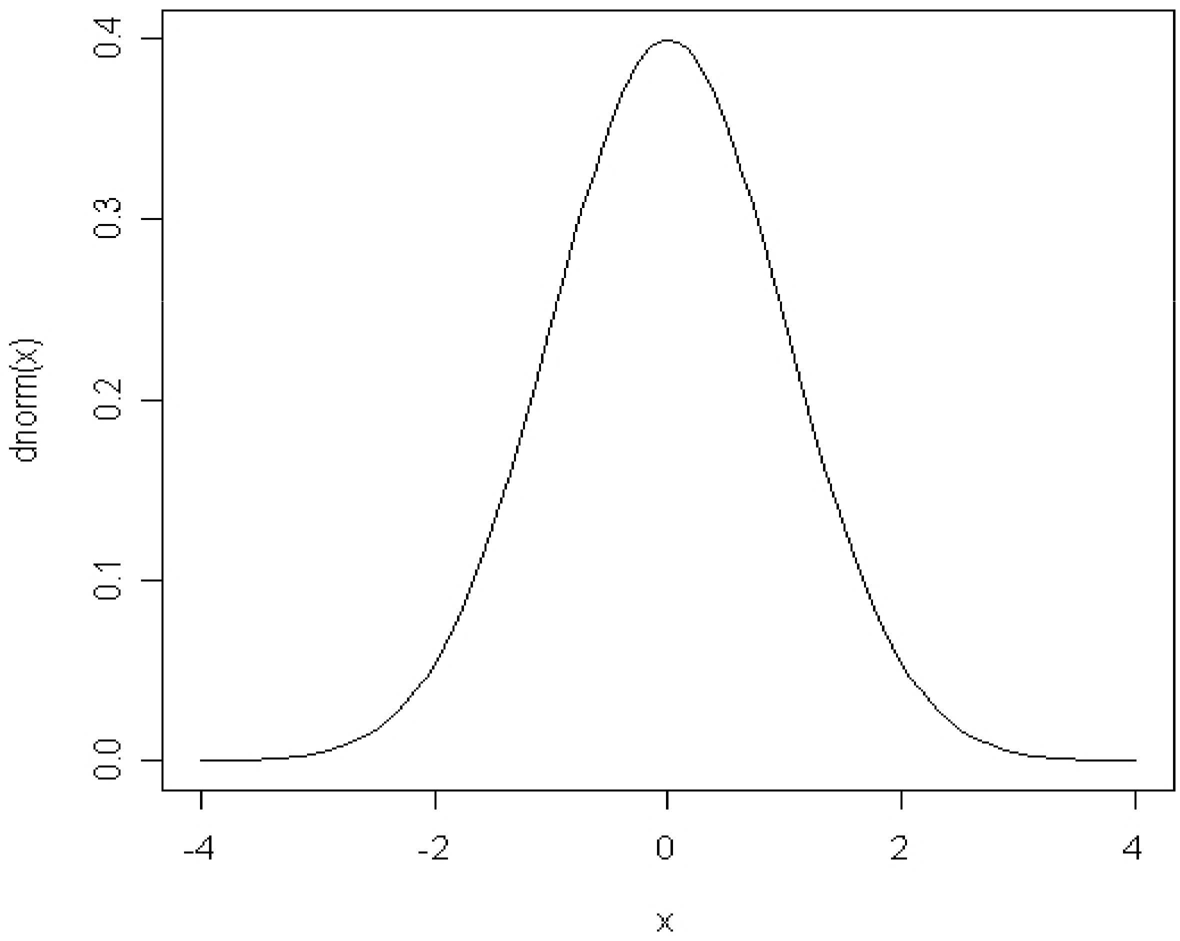


Dystrybuanta

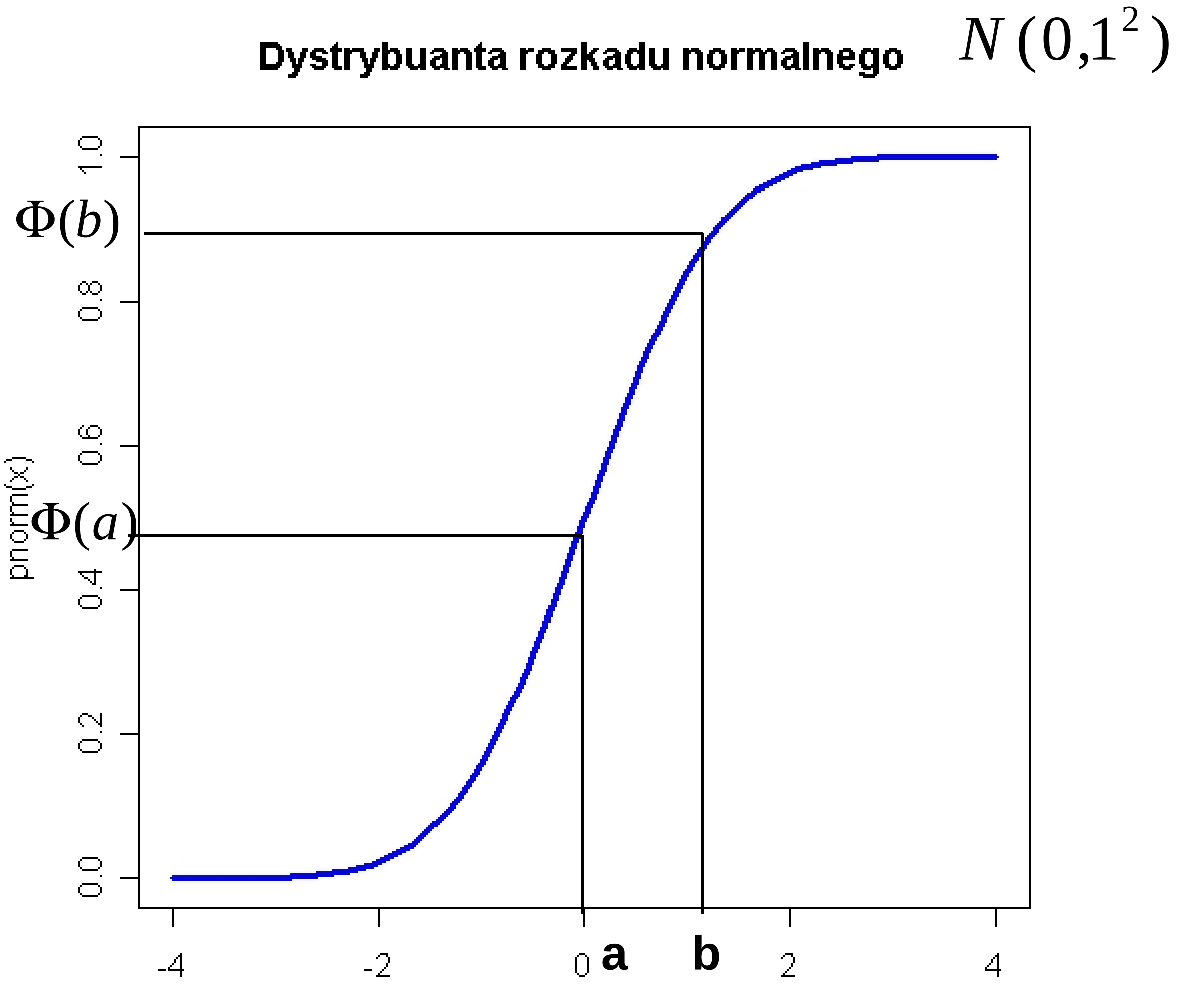


Gęstość rozkładu normalnego standaryzowanego

$$X \sim N(0,1^2)$$



Dystrybuanta rozkładu standaryzowanego

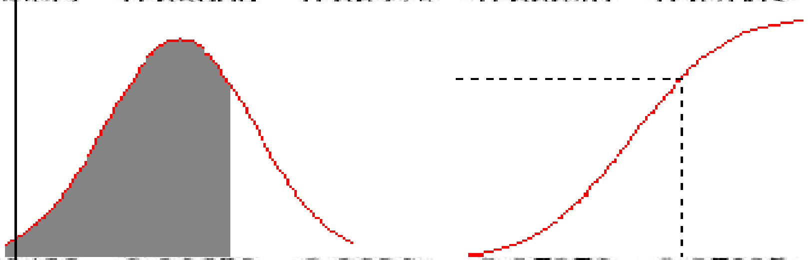


$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

$$P(a < z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

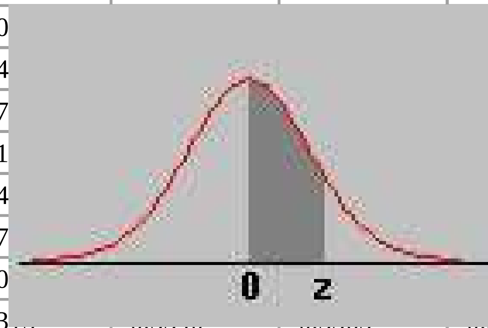
F(-x) = 1 - F(x) **Standaryzowany rozkład normalny - tablice**

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50398	0.50797	0.51196	0.51595	0.51993	0.52392	0.52790	0.53188	0.53585
0.1	0.53982	0.54379	0.54775	0.55171	0.55567	0.55961	0.56355	0.56749	0.57142	0.57534
0.2	0.57925	0.58316	0.58706	0.59095	0.59483	0.59870	0.60256	0.60641	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62171	0.62551	0.62930	0.63307	0.63683	0.64057	0.64430	0.64802	0.65173
0.4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.67364	0.67724	0.68082	0.68438	0.68793
0.5	[illegible]					0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	[illegible]					0.74215	0.74537	0.74857	0.75174	0.75490
0.7	[illegible]					0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78523
0.8	[illegible]					0.80233	0.80510	0.80784	0.81057	0.81326
0.9	[illegible]					0.82894	0.83147	0.83397	0.83645	0.83891
1.0	[illegible]					0.85314	0.85542	0.85769	0.85992	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87285	0.87492	0.87697	0.87899	0.88099	0.88297
1.2	0.88493	0.88686	0.88876	0.89065	0.89251	0.89435	0.89616	0.89795	0.89972	0.90147
1.3	0.90319	0.90490	0.90658	0.90824	0.90987	0.91149	0.91308	0.91465	0.91620	0.91773
1.4	0.91924	0.92073	0.92219	0.92364	0.92506	0.92647	0.92785	0.92921	0.93056	0.93188
1.5	0.93319	0.93447	0.93574	0.93699	0.93821	0.93942	0.94062	0.94179	0.94294	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94844	0.94949	0.95052	0.95154	0.95254	0.95352	0.95448
1.7	0.95543	0.95636	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96079	0.96163	0.96246	0.96327
1.8	0.96406	0.96485	0.96562	0.96637	0.96711	0.96784	0.96855	0.96925	0.96994	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97319	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97614	0.97670
2.0	0.97724	0.97778	0.97830	0.97882	0.97932	0.97981	0.98030	0.98077	0.98123	0.98169
2.1	0.98213	0.98257	0.98299	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98499	0.98537	0.98573
2.2	0.98609	0.98644	0.98679	0.98712	0.98745	0.98777	0.98808	0.98839	0.98869	0.98898
2.3	0.98927	0.98955	0.98982	0.99009	0.99035	0.99061	0.99086	0.99110	0.99134	0.99157
2.4	0.99180	0.99202	0.99223	0.99245	0.99265	0.99285	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99429	0.99445	0.99461	0.99476	0.99491	0.99505	0.99520
2.6	0.99533	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99597	0.99609	0.99620	0.99631	0.99642
2.7	0.99653	0.99663	0.99673	0.99683	0.99692	0.99702	0.99710	0.99719	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99759	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99794	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99824	0.99830	0.99835	0.99841	0.99846	0.99851	0.99855	0.99860
3.0	0.99865	0.99869	0.99873	0.99877	0.99881	0.99885	0.99889	0.99892	0.99896	0.99899
3.1	0.99903	0.99906	0.99909	0.99912	0.99915	0.99918	0.99921	0.99923	0.99926	0.99928
3.2	0.99931	0.99933	0.99935	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99949
3.3	0.99951	0.99953	0.99954	0.99956	0.99958	0.99959	0.99961	0.99962	0.99963	0.99965
3.4	0.99966	0.99967	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975
3.5	0.99976	0.99977	0.99978	0.99979	0.99979	0.99980	0.99981	0.99982	0.99982	0.99983

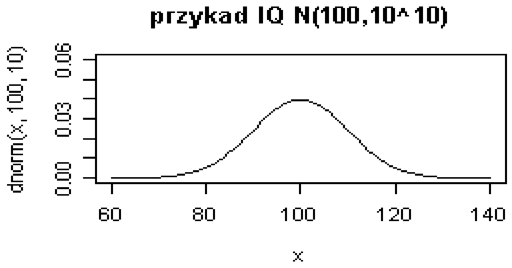


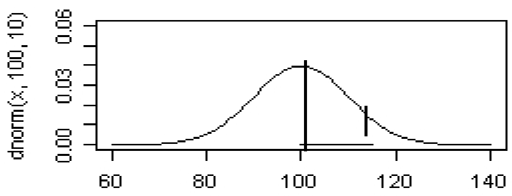
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0,8	0,2881	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,2995	0,3023	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0,9	0,3159	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,3264	0,3289	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

Trzeba dodać 0,5

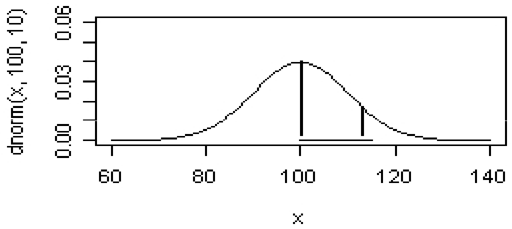


Zastosowanie rozkładu normalnego np. IQ~N(100,10^2)





0 1,5



$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

P(100<x<115)

Gdy x_1=100 to z = (100-100)/10 = 0.0
a x_2=115 to z = (115-100)/10 = 1,5
Dlatego P(100<X<115) = P(0,0<Z<1,5) = 0,9332-0,500 = 0,4332

Wartość „0.9332” znajdujemy z tablic Dystrybuanty $\Phi(z)$ N(0,1)

Ważne przybliżenie

$$B(n, p) \approx N(np, np(1-p))$$

$$np = \mu$$

n duże, *p* ”około” 0,5

$$np(1-p) = \sigma^2$$

$$\sqrt{np(1-p)} = \sigma$$

Przykład (ważne przybliżenie rozkładu dwumianowego rozkładem normalnym)

Obliczyć prawdopodobieństwo, że na 400 rzutów „uczciwą" monetą orzeł wypadł więcej niż 220 razy

np=400*0.5=200

np(1-p)=200*0.5=100

$$X \approx N(200, 10^2)$$

$$\mu = 200$$

$$\sigma^2 = 100$$

$$\sigma = 10$$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

x=220   z=(220-200)/10=2   P(Z>2)=1-P(Z<=2)

1-0.97725=0.0223

Wartości przeciętne i wariancje typowych rozkładów prawdopodobieństwa

- Rozkład dwumianowy. Jeśli S ~ $B(n,p)$,

  to $EX=np$ i $Var(X)=np(1-p)$.

- Rozkład normalny. Jeśli X ~ $N(\mu,\sigma^2)$

  to $EX=\mu$ $Var(X)=\sigma^2$