

# PODSTAWY BIOSTATYSTYKI ĆWICZENIA

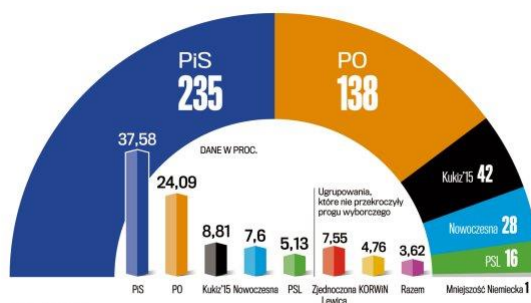


FILIP RACIBORSKI  
FILIP.RACIBORSKI@WUM.EDU.PL

ZAKŁAD PROFILAKTYKI ZAGROZEŃ  
ŚRODOWISKOWYCH I ALERGOLOGII WUM

## ZADANIE I

Z populacji wyborców pobrano próbkę 1000 osób i okazało się, że wśród nich 300 popiera partię X. Podać przedział ufności dla frakcji wyborców popierających partię X w populacji na poziomie ufności 0.95



© GAZETA WYBORCZA

<http://wyborcza.pl/1,75478,19099031,sukces-pis-choc-nie-triumf.html>

Źródło: PKW

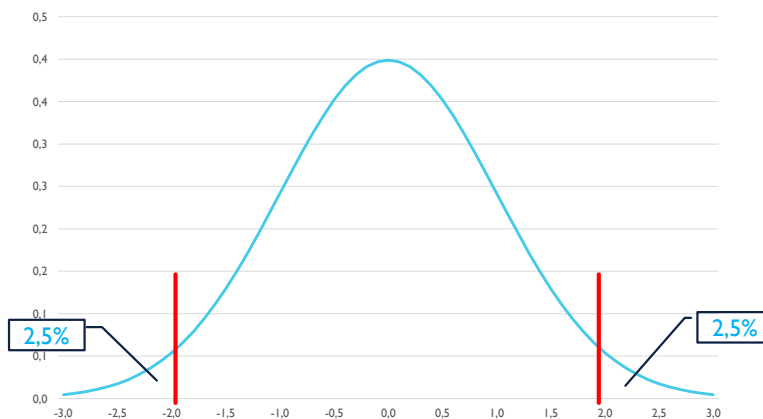
## ZADANIE 1

Z populacji wyborców pobrano próbkę 1000 osób i okazało się, że wśród nich 300 popiera partię X. Podać przedział ufności dla frakcji wyborców popierających partię X w populacji na poziomie ufności 0.95

- $k=300$  - liczba osób popierających partię X w próbie
- $n=1000$  - rozmiar próby
- $p=k/n=300/1000=0.3$  - oszacowana częstość poparcia dla partii X
- Poziom ufności=0.95, więc  $\alpha=0.05$  (poziom istotności)
- $z = (1 - \frac{\alpha}{2})$ - kwantyl rzędu  $(1 - \frac{\alpha}{2})$  ze standardowego rozkładu normalnego

$$\left[ \hat{p} - \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} * z; \hat{p} + \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} * z \right]$$

## ZADANIE I

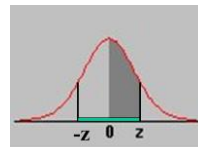


$$z = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.05}{2} = 1 - 0.025 = 0.975$$

## TABLICE ROZKŁADU NORMALNEGO STANDARYZOWANEGO

Powierzchnia pod krzywą rozkładu normalnego standaryzowanego. Dla wartości standardowej Z tabela podaje powierzchnię pod krzywą od Z=0 do podanej w kolumnie pierwszej i głowce tabeli wartości Z

|     | 0       | 0,01    | 0,02    | 0,03    | 0,04    | 0,05    | 0,06    | 0,07    | 0,08    | 0,09    |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,0 | 0,00000 | 0,00399 | 0,00798 | 0,01197 | 0,01595 | 0,01994 | 0,02392 | 0,02790 | 0,03188 | 0,03586 |
| 0,1 | 0,03983 | 0,04380 | 0,04776 | 0,05172 | 0,05567 | 0,05962 | 0,06356 | 0,06749 | 0,07142 | 0,07535 |
| 0,2 | 0,07926 | 0,08317 | 0,08706 | 0,09095 | 0,09483 | 0,09871 | 0,10257 | 0,10642 | 0,11026 | 0,11409 |
| 0,3 | 0,11791 | 0,12172 | 0,12552 | 0,12930 | 0,13307 | 0,13683 | 0,14058 | 0,14431 | 0,14803 | 0,15173 |
| 0,4 | 0,15542 | 0,15910 | 0,16276 | 0,16640 | 0,17003 | 0,17364 | 0,17724 | 0,18082 | 0,18439 | 0,18793 |
| 0,5 | 0,19146 | 0,19497 | 0,19847 | 0,20194 | 0,20540 | 0,20884 | 0,21226 | 0,21566 | 0,21904 | 0,22240 |
| 0,6 | 0,22575 | 0,22907 | 0,23237 | 0,23565 | 0,23891 | 0,24215 | 0,24537 | 0,24857 | 0,25175 | 0,25490 |
| 0,7 | 0,25804 | 0,26115 | 0,26424 | 0,26730 | 0,27035 | 0,27337 | 0,27637 | 0,27935 | 0,28230 | 0,28524 |
| 0,8 | 0,28814 | 0,29103 | 0,29389 | 0,29673 | 0,29955 | 0,30234 | 0,30511 | 0,30785 | 0,31057 | 0,31327 |
| 0,9 | 0,31594 | 0,31859 | 0,32121 | 0,32381 | 0,32639 | 0,32894 | 0,33147 | 0,33398 | 0,33646 | 0,33891 |
| 1,0 | 0,34134 | 0,34375 | 0,34614 | 0,34849 | 0,35083 | 0,35314 | 0,35543 | 0,35769 | 0,35993 | 0,36214 |
| 1,1 | 0,36433 | 0,36650 | 0,36864 | 0,37076 | 0,37286 | 0,37493 | 0,37698 | 0,37900 | 0,38100 | 0,38298 |
| 1,2 | 0,38493 | 0,38686 | 0,38877 | 0,39065 | 0,39251 | 0,39435 | 0,39617 | 0,39796 | 0,39973 | 0,40147 |
| 1,3 | 0,40320 | 0,40490 | 0,40658 | 0,40824 | 0,40988 | 0,41149 | 0,41309 | 0,41466 | 0,41621 | 0,41774 |
| 1,4 | 0,41924 | 0,42073 | 0,42220 | 0,42364 | 0,42507 | 0,42647 | 0,42785 | 0,42922 | 0,43056 | 0,43189 |
| 1,5 | 0,43319 | 0,43448 | 0,43574 | 0,43699 | 0,43822 | 0,43943 | 0,44062 | 0,44179 | 0,44295 | 0,44408 |
| 1,6 | 0,44520 | 0,44630 | 0,44738 | 0,44845 | 0,44950 | 0,45053 | 0,45154 | 0,45254 | 0,45352 | 0,45449 |
| 1,7 | 0,45543 | 0,45637 | 0,45728 | 0,45818 | 0,45907 | 0,45994 | 0,46080 | 0,46164 | 0,46246 | 0,46327 |
| 1,8 | 0,46407 | 0,46485 | 0,46562 | 0,46638 | 0,46712 | 0,46784 | 0,46856 | 0,46926 | 0,46995 | 0,47062 |
| 1,9 | 0,47128 | 0,47193 | 0,47257 | 0,47320 | 0,47381 | 0,47441 | 0,47500 | 0,47558 | 0,47615 | 0,47670 |
| 2,0 | 0,47725 | 0,47778 | 0,47831 | 0,47882 | 0,47932 | 0,47982 | 0,48030 | 0,48077 | 0,48124 | 0,48169 |



Ponieważ tabela jest dla połowy pola powierzchni pod krzywą rozkładu normalnego, to zamiast wartości 0,975 szukamy wartości mniejszej od 0,5, czyli **0.475**.

$z=1.96$

[EXCEL]=ROZKŁAD.NORMALNY.S.ODW(0,975)

## ZADANIE I

$$\left[ \hat{p} - \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} * z; \hat{p} + \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} * z \right]$$

$$\hat{p} \pm \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} * z = 0,3 \pm \frac{\sqrt{0,3 \cdot 0,7}}{\sqrt{1000}} \cdot 1,96 = 0,3 \pm 0,0284$$

$$L = 0,3 - 0,0284$$

$$P = 0,3 + 0,0284$$

$$L = 0,2716$$

$$P = 0,3284$$

- Stąd z ufnością 95 % poparcie dla partii X zawiera się w przedziale: [0.2716, 0.3284].
- Przeważnie przekazując badania opinii publicznej nie podaje się przedziału ufności lecz mówi się o błędzie (media podałyby: poparcie dla partii X wynosi 30%; błąd oszacowania 3%)

## ZADANIE 2

palenie  
wyszczupła

Na pewnej uczelni zbadano próbę 625 studentek. Okazało się, że 125 z nich pali papierosy. Podać przedział ufności 90% dla frakcji palących w całej populacji studentek.



<http://www.youth-culture.csd.pl/pages1/gadgets/palenie.html>

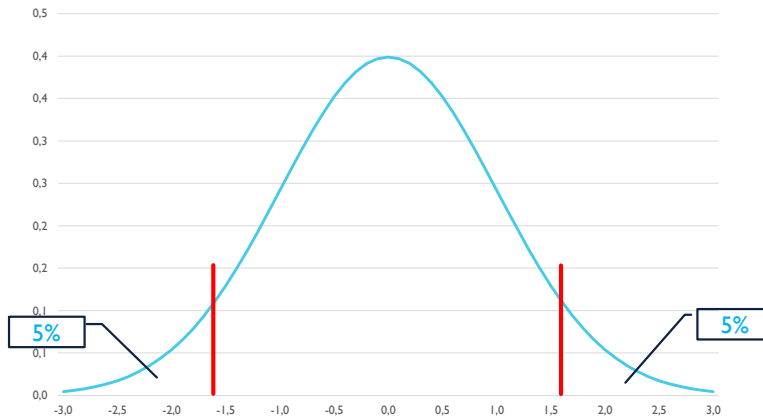
## ZADANIE 2

Na pewnej uczelni zbadano próbę 625 studentek. Okazało się, że 125 z nich pali papierosy. Podać przedział ufności 90% dla frakcji palących w całej populacji studentek.

- $k=125$  - liczba palących papierosy studentek
- $n=625$  - łączna liczba studentek
- $p=k/n=125/625=0.2$  - oszacowana częstość palenia papierosów
- Poziom ufności=0.90, więc poziom istotności  $\alpha=0.1$
- $z = (1 - \frac{\alpha}{2})$  - kwantyl rzędu  $(1 - \frac{\alpha}{2})$  ze standardowego rozkładu normalnego

$$\left[ \hat{p} - \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} * z; \hat{p} + \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} * z \right]$$

## ZADANIE 2

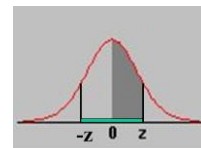


$$z = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.1}{2} = 1 - 0.05 = 0.95$$

## TABLICE ROZKŁADU NORMALNEGO STANDARYZOWANEGO

Powierzchnia pod krzywą rozkładu normalnego standaryzowanego. Dla wartości standardowej Z tablica podaje powierzchnię pod krzywą od Z=0 do podanej w kolumnie pierwszej i główce tablicy wartości Z

|     | 0      | 0,01   | 0,02   | 0,03   | 0,04   | 0,05   | 0,06   | 0,07   | 0,08   | 0,09   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,0000 | 0,0039 | 0,0079 | 0,0119 | 0,0159 | 0,0199 | 0,0239 | 0,0279 | 0,0318 | 0,0358 |
| 0,1 | 0,0398 | 0,0438 | 0,0477 | 0,0517 | 0,0557 | 0,0596 | 0,0636 | 0,0674 | 0,0714 | 0,0753 |
| 0,2 | 0,0792 | 0,0831 | 0,0870 | 0,0909 | 0,0948 | 0,0987 | 0,1025 | 0,1064 | 0,1102 | 0,1140 |
| 0,3 | 0,1179 | 0,1217 | 0,1255 | 0,1293 | 0,1330 | 0,1368 | 0,1405 | 0,1443 | 0,1480 | 0,1517 |
| 0,4 | 0,1554 | 0,1591 | 0,1627 | 0,1664 | 0,1700 | 0,1736 | 0,1772 | 0,1808 | 0,1843 | 0,1879 |
| 0,5 | 0,1914 | 0,1949 | 0,1984 | 0,2019 | 0,2054 | 0,2088 | 0,2122 | 0,2156 | 0,2190 | 0,2224 |
| 0,6 | 0,2257 | 0,2290 | 0,2323 | 0,2356 | 0,2389 | 0,2421 | 0,2453 | 0,2485 | 0,2517 | 0,2549 |
| 0,7 | 0,2580 | 0,2611 | 0,2642 | 0,2673 | 0,2703 | 0,2733 | 0,2763 | 0,2793 | 0,2823 | 0,2852 |
| 0,8 | 0,2881 | 0,2910 | 0,2938 | 0,2967 | 0,2995 | 0,3023 | 0,3051 | 0,3078 | 0,3105 | 0,3132 |
| 0,9 | 0,3159 | 0,3185 | 0,3211 | 0,3238 | 0,3263 | 0,3289 | 0,3314 | 0,3338 | 0,3364 | 0,3389 |
| 1,0 | 0,3413 | 0,3437 | 0,3461 | 0,3484 | 0,3508 | 0,3531 | 0,3554 | 0,3576 | 0,3599 | 0,3621 |
| 1,1 | 0,3643 | 0,3665 | 0,3686 | 0,3707 | 0,3728 | 0,3749 | 0,3769 | 0,3790 | 0,3810 | 0,3829 |
| 1,2 | 0,3849 | 0,3868 | 0,3887 | 0,3906 | 0,3925 | 0,3943 | 0,3961 | 0,3979 | 0,3997 | 0,4014 |
| 1,3 | 0,4032 | 0,4049 | 0,4065 | 0,4082 | 0,4098 | 0,4114 | 0,4130 | 0,4146 | 0,4162 | 0,4177 |
| 1,4 | 0,4192 | 0,4207 | 0,4222 | 0,4236 | 0,4250 | 0,4264 | 0,4278 | 0,4292 | 0,4305 | 0,4318 |
| 1,5 | 0,4331 | 0,4344 | 0,4357 | 0,4369 | 0,4382 | 0,4394 | 0,4406 | 0,4417 | 0,4429 | 0,4440 |
| 1,6 | 0,4452 | 0,4463 | 0,4473 | 0,4484 | 0,4495 | 0,4505 | 0,4515 | 0,4524 | 0,4532 | 0,4541 |
| 1,7 | 0,4543 | 0,4553 | 0,4562 | 0,4571 | 0,4580 | 0,4589 | 0,4598 | 0,4606 | 0,4614 | 0,4622 |
| 1,8 | 0,4640 | 0,4648 | 0,4656 | 0,4663 | 0,4671 | 0,4678 | 0,4685 | 0,4692 | 0,4699 | 0,4706 |
| 1,9 | 0,4712 | 0,4719 | 0,4725 | 0,4732 | 0,4738 | 0,4744 | 0,4750 | 0,4755 | 0,4761 | 0,4767 |
| 2,0 | 0,4772 | 0,4777 | 0,4781 | 0,4786 | 0,4791 | 0,4796 | 0,4800 | 0,4804 | 0,4808 | 0,4812 |



Ponieważ tablica jest dla połowy pola powierzchni pod krzywą rozkładu normalnego, to zamiast wartości 0.95 szukamy wartości mniejszej od 0,5, czyli **0.45**.

$$z = 1.64$$

[EXCEL]=ROZKŁAD.NORMALNY.S.ODW(0,95)

## ZADANIE 2

$$\left[ \hat{p} - \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} * z; \hat{p} + \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} * z \right]$$

$$\begin{aligned} \hat{p} \pm \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} * z &= 0,2 \pm \frac{\sqrt{0,2 \cdot 0,8}}{\sqrt{625}} \cdot 1,64 = 0,2 \pm \frac{\sqrt{0,16}}{25} \cdot 1,64 = \\ &= 0,2 \pm \frac{0,4}{25} \cdot 1,64 = 0,2 \pm 0,02623 \end{aligned}$$

- Przedział ufności dla frakcji palących w całej populacji studentek: [0.1737, 0.2262]
- W Excelu wartość z dla tego zdania możemy uzyskać za pomocą formuły:
  - =ROZKŁAD.NORMALNY.S.ODW(0,95)
  - =ROZKŁAD.NORMALNY.ODW(0,95;0;1)

## PRZYPOMNIENIE ROZKŁAD T-STUDENTA

*Angielski statystyk, William Sealy Gosset (1876 - 1937) zasłynął jako twórca wprowadzonego w 1908 roku rozkładu prawdopodobieństwa, znanego pod nazwą rozkładu t - Studenta.*

*Nazwa związana jest z pseudonimem Student, pod którym Gosset publikował. Podstawą do opracowania rozkładu prawdopodobieństwa stały się testy statystyczne przeprowadzane z próbkami piwa w irlandzkim browarze Arta Guinnessa, w którym Gosset pracował.*



[https://pl.wikipedia.org/wiki/William\\_Sealy\\_Gosset](https://pl.wikipedia.org/wiki/William_Sealy_Gosset)

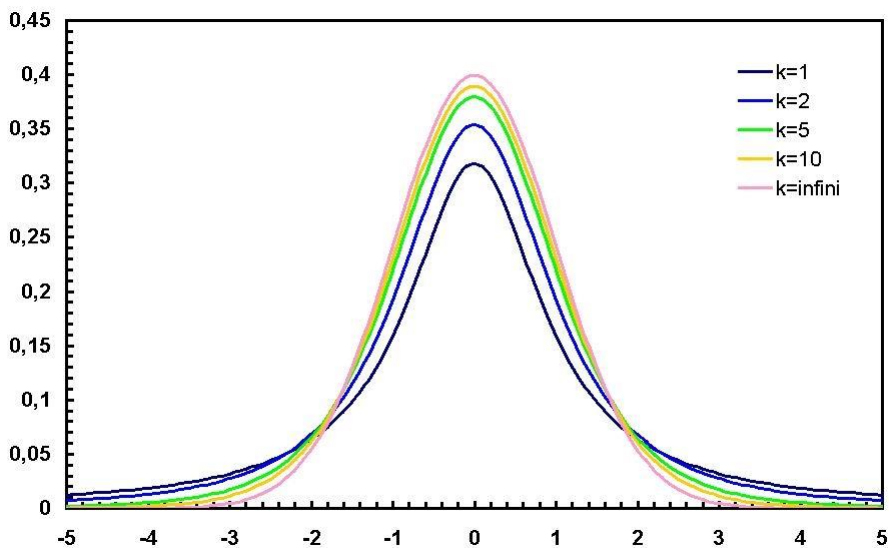
<http://www.edustat.com.pl/historia.html?nr=14>

## PRZYPOMNIENIE ROZKŁAD T-STUDENTA

- Dysponujemy wynikami  $n$  pomiarów, dla których możemy wyznaczyć estymatory parametrów populacyjnych, jak średnia ( $\bar{X}$ ) i odchylenie standardowe ( $s$ ) lub wariancja ( $s^2$ ), nie znamy natomiast odchylenia standardowego ( $\sigma$ ) w populacji. Zagadnienie to rozwiązał (w 1908r.) W.S. Gosset (pseudonim Student) podając funkcję zależną od tzw. stopni swobody ( $df$ ) i poziomu istotności ( $\alpha$ ).
- Wartości krytyczne  $t(\alpha; n-1)$  dla rozkładu t-Studenta odczytujemy z tablicy rozkładu t-Studenta.
- Stopnie swobody związane są z liczebnością próbki  $df = n-1$ .

Wykład dr M. Zalewska

### Szeregi statystyczne, estymacja parametryczna punktowa i przedziałowa

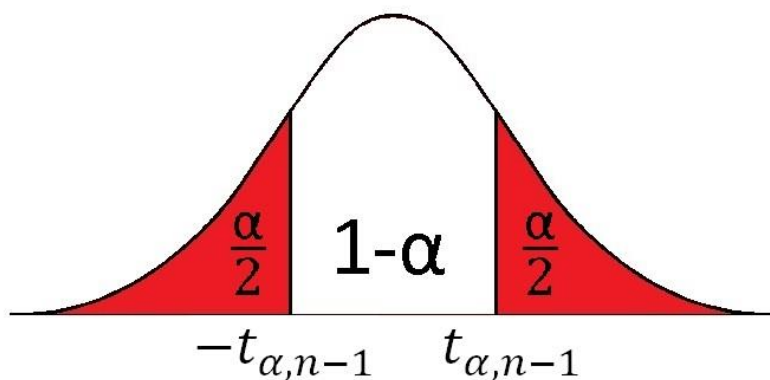


[https://pl.wikipedia.org/wiki/Rozk%C5%82ad\\_Studenta#Zastosowania](https://pl.wikipedia.org/wiki/Rozk%C5%82ad_Studenta#Zastosowania)

## Szeregi statystyczne, estymacja parametryczna punktowa i przedziałowa

$\alpha$  - współczynnik ufności/poziom istotności

$(1 - \alpha)$  – poziom ufności



<http://www.statystyka-zadania.pl/tablica-rozkładu-t-studenta/>

15

| Wartości krytyczne rozkładu t dla różnych poziomów istotności testu |                                            |        |         |         |         |          |
|---------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|--------|---------|---------|---------|----------|
| stopni swobody                                                      | jednostronnego i dwustronnego              |        |         |         |         |          |
|                                                                     | Poziom istotności dla testu jednostronnego |        |         |         |         |          |
|                                                                     | 0,1                                        | 0,05   | 0,025   | 0,01    | 0,005   | 0,0005   |
|                                                                     | Poziom istotności dla testu dwustronnego   |        |         |         |         |          |
|                                                                     | 0,2                                        | 0,1    | 0,05    | 0,02    | 0,01    | 0,001    |
| 1                                                                   | 3,0777                                     | 6,3137 | 12,7062 | 31,8210 | 63,6559 | 636,5776 |
| 2                                                                   | 1,8856                                     | 2,9200 | 4,3027  | 6,9645  | 9,9250  | 31,5995  |
| 3                                                                   | 1,6377                                     | 2,3534 | 3,1824  | 4,5407  | 5,8408  | 12,9244  |
| 4                                                                   | 1,5332                                     | 2,1318 | 2,7765  | 3,7469  | 4,6041  | 8,6101   |
| 5                                                                   | 1,4759                                     | 2,0150 | 2,5706  | 3,3649  | 4,0321  | 6,8685   |
| 6                                                                   | 1,4398                                     | 1,9432 | 2,4469  | 3,1427  | 3,7074  | 5,9587   |
| 7                                                                   | 1,4149                                     | 1,8946 | 2,3646  | 2,9979  | 3,4995  | 5,4081   |
| 8                                                                   | 1,3968                                     | 1,8595 | 2,3060  | 2,8965  | 3,3554  | 5,0414   |
| 9                                                                   | 1,3830                                     | 1,8331 | 2,2622  | 2,8214  | 3,2498  | 4,7809   |
| 10                                                                  | 1,3722                                     | 1,8125 | 2,2281  | 2,7638  | 3,1693  | 4,5868   |
| 11                                                                  | 1,3634                                     | 1,7959 | 2,2010  | 2,7181  | 3,1058  | 4,4369   |
| 12                                                                  | 1,3562                                     | 1,7823 | 2,1788  | 2,6810  | 3,0545  | 4,3178   |
| 13                                                                  | 1,3502                                     | 1,7709 | 2,1604  | 2,6503  | 3,0123  | 4,2209   |
| 14                                                                  | 1,3450                                     | 1,7613 | 2,1448  | 2,6245  | 2,9768  | 4,1403   |
| 15                                                                  | 1,3406                                     | 1,7531 | 2,1315  | 2,6025  | 2,9467  | 4,0728   |
| 16                                                                  | 1,3368                                     | 1,7459 | 2,1199  | 2,5835  | 2,9208  | 4,0149   |
| 17                                                                  | 1,3334                                     | 1,7396 | 2,1098  | 2,5669  | 2,8982  | 3,9651   |
| 18                                                                  | 1,3304                                     | 1,7341 | 2,1009  | 2,5524  | 2,8784  | 3,9217   |
| 19                                                                  | 1,3277                                     | 1,7291 | 2,0930  | 2,5395  | 2,8609  | 3,8833   |
| 20                                                                  | 1,3253                                     | 1,7247 | 2,0860  | 2,5280  | 2,8453  | 3,8496   |
| 21                                                                  | 1,3232                                     | 1,7207 | 2,0796  | 2,5176  | 2,8314  | 3,8193   |
| 22                                                                  | 1,3212                                     | 1,7171 | 2,0739  | 2,5083  | 2,8188  | 3,7922   |
| 23                                                                  | 1,3195                                     | 1,7139 | 2,0687  | 2,4999  | 2,8073  | 3,7676   |
| 24                                                                  | 1,3178                                     | 1,7109 | 2,0639  | 2,4922  | 2,7970  | 3,7454   |
| 25                                                                  | 1,3163                                     | 1,7081 | 2,0595  | 2,4851  | 2,7874  | 3,7251   |
| 26                                                                  | 1,3150                                     | 1,7056 | 2,0555  | 2,4786  | 2,7787  | 3,7067   |
| 27                                                                  | 1,3137                                     | 1,7033 | 2,0518  | 2,4727  | 2,7707  | 3,6895   |
| 28                                                                  | 1,3125                                     | 1,7011 | 2,0484  | 2,4671  | 2,7633  | 3,6739   |
| 29                                                                  | 1,3114                                     | 1,6991 | 2,0452  | 2,4620  | 2,7564  | 3,6595   |
| 30                                                                  | 1,3104                                     | 1,6973 | 2,0423  | 2,4573  | 2,7500  | 3,6460   |
| 40                                                                  | 1,3031                                     | 1,6839 | 2,0211  | 2,4233  | 2,7045  | 3,5510   |
| 50                                                                  | 1,2987                                     | 1,6759 | 2,0086  | 2,4033  | 2,6778  | 3,4960   |
| 60                                                                  | 1,2958                                     | 1,6706 | 2,0003  | 2,3901  | 2,6603  | 3,4602   |
| 120                                                                 | 1,2886                                     | 1,6576 | 1,9799  | 2,3578  | 2,6174  | 3,3734   |
| ∞                                                                   | 1,2816                                     | 1,6449 | 1,9600  | 2,3263  | 2,5758  | 3,2906   |



## ZADANIE 3

- Czasy wykonania pewnej analizy jest zmienną losową o rozkładzie normalnym.
- Na podstawie poniższej próby (w sekundach): 10.3, 15.1, 13.8, 16.4, 13, 15.2, 14.8, 16.4, 16.1, 15.1 podaj 95 % i 90 % przedziały ufności dla średniego czasu wykonania analizy.



<http://polanik.info.pl/pl/p/HS80TW-stoper-Casio/1640>

## ZADANIE 3

Na podstawie poniższej próby (w sekundach): 10.3, 15.1, 13.8, 16.4, 13, 15.2, 14.8, 16.4, 16.1, 15.1 podaj 95 % i 90 % przedziały ufności dla średniego czasu wykonania analizy.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{10,3+15,1+13,8+16,4+13+15,2+14,8+16,4+16,1+15,1}{10} = 14,62$$

$$D^2 X = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$$

|                     |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_i$               | 10,3  | 15,1  | 13,8  | 16,4  | 13    | 15,2  | 14,8  | 16,4  | 16,1  | 15,1  |
| $x_i - \bar{X}$     | -4,32 | 0,48  | -0,82 | 1,78  | -1,62 | 0,58  | 0,18  | 1,78  | 1,48  | 0,48  |
| $(x_i - \bar{X})^2$ | 18,66 | 0,230 | 0,672 | 3,178 | 2,624 | 0,336 | 0,032 | 3,178 | 2,190 | 0,230 |

### ZADANIE 3

$$D^2 X = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 = 3,48$$

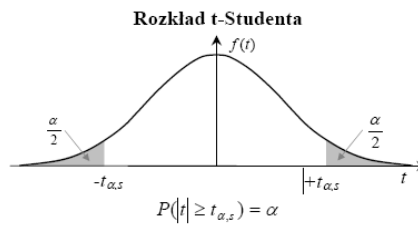
$$s = \sqrt{D^2 X} = \sqrt{3,48} = 1,865$$

- wzór na przedział ufności dla średniej przy nieznanym odchyleniu standardowym w populacji przedstawiono poniżej:

$$\left[ \underbrace{\bar{X} - t\left(1 - \frac{\alpha}{2}; n-1\right) \frac{S}{\sqrt{n}}}_{\text{granica lewego (L) przedziału ufności}}, \quad \underbrace{\bar{X} + t\left(1 - \frac{\alpha}{2}; n-1\right) \frac{S}{\sqrt{n}}}_{\text{granica prawego (P) przedziału ufności}} \right]$$

granica lewego (L) przedziału ufności      granica prawego (P) przedziału ufności

| stopni swobody | Wartości krytyczne rozkładu t dla różnych poziomów istotności testu jednostronnego i dwustronnego |        |         |         |         |          |
|----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|---------|---------|---------|----------|
|                | Poziom istotności dla testu jednostronnego                                                        |        |         |         |         |          |
|                | 0,1                                                                                               | 0,05   | 0,025   | 0,01    | 0,005   | 0,0005   |
|                | Poziom istotności dla testu dwustronnego                                                          |        |         |         |         |          |
|                | 0,2                                                                                               | 0,1    | 0,05    | 0,02    | 0,01    | 0,001    |
| 1              | 3,0777                                                                                            | 6,3137 | 12,7062 | 31,8210 | 63,6559 | 636,5776 |
| 2              | 1,8856                                                                                            | 2,9200 | 4,3027  | 6,9645  | 9,9250  | 31,5998  |
| 3              | 1,6377                                                                                            | 2,3534 | 3,1824  | 4,5407  | 5,8408  | 12,9244  |
| 4              | 1,5332                                                                                            | 2,1318 | 2,7765  | 3,7469  | 4,6041  | 8,6101   |
| 5              | 1,4759                                                                                            | 2,0150 | 2,5706  | 3,3649  | 4,0321  | 6,8686   |
| 6              | 1,4398                                                                                            | 1,9432 | 2,4469  | 3,1427  | 3,7074  | 5,9587   |
| 7              | 1,4149                                                                                            | 1,8946 | 2,3646  | 2,9979  | 3,4995  | 5,4081   |
| 8              | 1,3968                                                                                            | 1,8595 | 2,3060  | 2,8965  | 3,3554  | 5,0414   |
| 9              | 1,3830                                                                                            | 1,8331 | 2,2622  | 2,8214  | 3,2498  | 4,7809   |
| 10             | 1,3722                                                                                            | 1,8125 | 2,2281  | 2,7638  | 3,1693  | 4,5868   |
| 11             | 1,3634                                                                                            | 1,7959 | 2,2010  | 2,7181  | 3,1058  | 4,4369   |
| 12             | 1,3562                                                                                            | 1,7823 | 2,1788  | 2,6810  | 3,0545  | 4,3178   |
| 13             | 1,3502                                                                                            | 1,7709 | 2,1604  | 2,6503  | 3,0123  | 4,2209   |
| 14             | 1,3450                                                                                            | 1,7613 | 2,1448  | 2,6245  | 2,9768  | 4,1403   |
| 15             | 1,3406                                                                                            | 1,7531 | 2,1315  | 2,6025  | 2,9467  | 4,0728   |
| 16             | 1,3368                                                                                            | 1,7459 | 2,1199  | 2,5835  | 2,9208  | 4,0149   |
| 17             | 1,3334                                                                                            | 1,7396 | 2,1098  | 2,5669  | 2,8982  | 3,9651   |
| 18             | 1,3304                                                                                            | 1,7341 | 2,1009  | 2,5524  | 2,8784  | 3,9217   |
| 19             | 1,3277                                                                                            | 1,7291 | 2,0930  | 2,5395  | 2,8609  | 3,8833   |
| 20             | 1,3253                                                                                            | 1,7247 | 2,0860  | 2,5280  | 2,8453  | 3,8496   |
| 21             | 1,3232                                                                                            | 1,7207 | 2,0796  | 2,5176  | 2,8314  | 3,8193   |
| 22             | 1,3212                                                                                            | 1,7171 | 2,0739  | 2,5083  | 2,8188  | 3,7922   |
| 23             | 1,3195                                                                                            | 1,7139 | 2,0687  | 2,4999  | 2,8073  | 3,7676   |
| 24             | 1,3178                                                                                            | 1,7109 | 2,0639  | 2,4922  | 2,7970  | 3,7454   |
| 25             | 1,3163                                                                                            | 1,7081 | 2,0595  | 2,4851  | 2,7874  | 3,7251   |
| 26             | 1,3150                                                                                            | 1,7056 | 2,0555  | 2,4786  | 2,7787  | 3,7067   |
| 27             | 1,3137                                                                                            | 1,7033 | 2,0518  | 2,4727  | 2,7707  | 3,6895   |
| 28             | 1,3125                                                                                            | 1,7011 | 2,0484  | 2,4671  | 2,7633  | 3,6739   |
| 29             | 1,3114                                                                                            | 1,6991 | 2,0452  | 2,4620  | 2,7564  | 3,6595   |
| 30             | 1,3104                                                                                            | 1,6973 | 2,0423  | 2,4573  | 2,7500  | 3,6460   |
| 40             | 1,3031                                                                                            | 1,6839 | 2,0211  | 2,4233  | 2,7045  | 3,5510   |
| 50             | 1,2987                                                                                            | 1,6759 | 2,0086  | 2,4033  | 2,6778  | 3,4960   |
| 60             | 1,2958                                                                                            | 1,6706 | 2,0003  | 2,3901  | 2,6603  | 3,4602   |
| 120            | 1,2886                                                                                            | 1,6576 | 1,9799  | 2,3578  | 2,6174  | 3,3734   |
| ∞              | 1,2816                                                                                            | 1,6449 | 1,9600  | 2,3263  | 2,5758  | 3,2906   |



$\alpha=0.05$ , obliczamy kwantyl rzędu  
 $t(0,975,9)=2.26$

$\alpha=0.10$ , obliczamy kwantyl rzędu  
 $t(0,95,9)=1.83$

- W Excelu wartość t dla tego zadania możemy uzyskać za pomocą formuły:

=ROZKŁAD.T.ODW(0,05;9)

=ROZKŁAD.T.ODW(0,1;9)

podstawiamy wartości do wzoru na przedział ufności

$$L = \bar{X} - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} =$$
$$= 14,62 - 2,26 \cdot \frac{1,865}{\sqrt{10}} = 13,29$$

$$P = \bar{X} + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} =$$
$$= 14,62 + 2,26 \cdot \frac{1,865}{\sqrt{10}} = 15,95$$

Odp. [13.29; 15.95]

$$L = 14,62 - 1,83 \cdot \frac{1,865}{\sqrt{10}} = 13,54$$

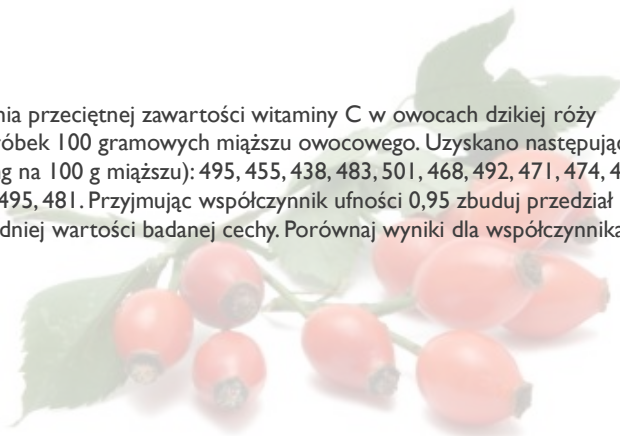
$$P = 14,62 + 1,83 \cdot \frac{1,865}{\sqrt{10}} = 15,70$$

Odp. [13.54; 15.70]

21

## ZADANIE 4

W celu ustalenia przeciętnej zawartości witaminy C w owocach dzikiej róży pobrano 15 próbek 100 gramowych miąższu owocowego. Uzyskano następujące rezultaty (w mg na 100 g miąższu): 495, 455, 438, 483, 501, 468, 492, 471, 474, 485, 504, 469, 478, 495, 481. Przyjmując współczynnik ufności 0,95 zbuduj przedział ufności dla średniej wartości badanej cechy. Porównaj wyniki dla współczynnika ufności 0,99.



<http://bellis.blog.onet.pl/2009/10/28/dzika-roza/>

## ZADANIE 4

W celu ustalenia przeciętnej zawartości witaminy C w owocach dzikiej róży pobrano 15 próbek 100 gramowych miąższu owocowego. Uzyskano następujące rezultaty (w mg na 100 g miąższu): 495, 455, 438, 483, 501, 468, 492, 471, 474, 485, 504, 469, 478, 495, 481. Przyjmując współczynnik ufności 0,95 zbuduj przedział ufności dla średniej wartości badanej cechy. Porównaj wyniki dla współczynnika ufności 0,99.

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \\ &= \frac{495 + 455 + 438 + 483 + 501 + 468 + 492 + 471 + 474 + 485 + 504 + 469 + 478 + 495 + 481}{15} \\ &= \frac{7189}{15} = 479,27\end{aligned}$$

## ZADANIE 4

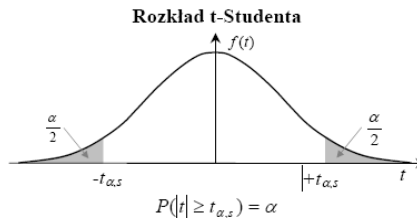
$$D^2 X = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$$

|                     |       |       |        |      |       |       |       |      |      |      |       |       |      |       |     |
|---------------------|-------|-------|--------|------|-------|-------|-------|------|------|------|-------|-------|------|-------|-----|
|                     | 495   | 455   | 438    | 483  | 501   | 468   | 492   | 471  | 474  | 485  | 504   | 469   | 478  | 495   | 481 |
| $x_i - \bar{X}$     | 15,7  | -24,3 | -41,3  | 3,7  | 21,7  | -11,3 | 12,7  | -8,3 | -5,3 | 5,7  | 24,7  | -10,3 | -1,3 | 15,7  | 1,7 |
| $(x_i - \bar{X})^2$ | 247,5 | 588,9 | 1702,9 | 13,9 | 472,3 | 126,9 | 162,1 | 68,3 | 27,7 | 32,9 | 611,7 | 105,4 | 1,6  | 247,5 | 3,0 |

$$D^2 X = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 = \frac{4412,9}{15-1} \approx 315,21$$

$$s = \sqrt{D^2 X} = \sqrt{315,21} = 17,754$$

| Wartości krytyczne rozkładu t dla różnych poziomów istotności testu jednostronnego i dwustronnego |                                            |        |         |         |         |          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|--------|---------|---------|---------|----------|
| stopni swobody                                                                                    | Poziom istotności dla testu jednostronnego |        |         |         |         |          |
|                                                                                                   | 0,1                                        | 0,05   | 0,025   | 0,01    | 0,005   | 0,0005   |
|                                                                                                   | Poziom istotności dla testu dwustronnego   |        |         |         |         |          |
|                                                                                                   | 0,2                                        | 0,1    | 0,05    | 0,02    | 0,01    | 0,001    |
| 1                                                                                                 | 3,0777                                     | 6,3137 | 12,7062 | 31,8210 | 63,6559 | 636,5776 |
| 2                                                                                                 | 1,8856                                     | 2,9200 | 4,3027  | 6,9645  | 9,9250  | 31,5998  |
| 3                                                                                                 | 1,6377                                     | 2,3534 | 3,1824  | 4,5407  | 5,8408  | 12,9244  |
| 4                                                                                                 | 1,5332                                     | 2,1318 | 2,7765  | 3,7469  | 4,6041  | 8,6101   |
| 5                                                                                                 | 1,4759                                     | 2,0150 | 2,5706  | 3,3649  | 4,0321  | 6,8685   |
| 6                                                                                                 | 1,4398                                     | 1,9432 | 2,4489  | 3,1427  | 3,7074  | 5,9587   |
| 7                                                                                                 | 1,4149                                     | 1,8946 | 2,3646  | 2,9979  | 3,4995  | 5,4081   |
| 8                                                                                                 | 1,3968                                     | 1,8595 | 2,3060  | 2,8965  | 3,3554  | 5,0414   |
| 9                                                                                                 | 1,3830                                     | 1,8331 | 2,2622  | 2,8214  | 3,2498  | 4,7809   |
| 10                                                                                                | 1,3722                                     | 1,8125 | 2,2311  | 2,7638  | 3,1693  | 4,5868   |
| 11                                                                                                | 1,3634                                     | 1,7959 | 2,2010  | 2,7181  | 3,1058  | 4,4369   |
| 12                                                                                                | 1,3562                                     | 1,7823 | 2,1788  | 2,6810  | 3,0545  | 4,3178   |
| 13                                                                                                | 1,3502                                     | 1,7709 | 2,1604  | 2,6503  | 3,0123  | 4,2209   |
| 14                                                                                                | 1,3450                                     | 1,7613 | 2,1448  | 2,6245  | 2,9768  | 4,1403   |
| 15                                                                                                | 1,3406                                     | 1,7531 | 2,1315  | 2,6025  | 2,9467  | 4,0728   |
| 16                                                                                                | 1,3368                                     | 1,7459 | 2,1199  | 2,5835  | 2,9208  | 4,0149   |
| 17                                                                                                | 1,3334                                     | 1,7396 | 2,1098  | 2,5669  | 2,8982  | 3,9651   |
| 18                                                                                                | 1,3304                                     | 1,7341 | 2,1009  | 2,5524  | 2,8784  | 3,9217   |
| 19                                                                                                | 1,3277                                     | 1,7291 | 2,0930  | 2,5395  | 2,8609  | 3,8833   |
| 20                                                                                                | 1,3253                                     | 1,7247 | 2,0860  | 2,5280  | 2,8453  | 3,8496   |
| 21                                                                                                | 1,3232                                     | 1,7207 | 2,0796  | 2,5176  | 2,8314  | 3,8193   |
| 22                                                                                                | 1,3212                                     | 1,7171 | 2,0739  | 2,5083  | 2,8188  | 3,7922   |
| 23                                                                                                | 1,3195                                     | 1,7139 | 2,0687  | 2,4999  | 2,8073  | 3,7676   |
| 24                                                                                                | 1,3178                                     | 1,7109 | 2,0639  | 2,4922  | 2,7970  | 3,7454   |
| 25                                                                                                | 1,3163                                     | 1,7081 | 2,0595  | 2,4851  | 2,7874  | 3,7251   |
| 26                                                                                                | 1,3150                                     | 1,7056 | 2,0555  | 2,4786  | 2,7787  | 3,7067   |
| 27                                                                                                | 1,3137                                     | 1,7033 | 2,0518  | 2,4727  | 2,7707  | 3,6895   |
| 28                                                                                                | 1,3125                                     | 1,7011 | 2,0484  | 2,4671  | 2,7633  | 3,6739   |
| 29                                                                                                | 1,3114                                     | 1,6991 | 2,0452  | 2,4620  | 2,7564  | 3,6595   |
| 30                                                                                                | 1,3104                                     | 1,6973 | 2,0423  | 2,4573  | 2,7500  | 3,6460   |
| 40                                                                                                | 1,3031                                     | 1,6939 | 2,0211  | 2,4233  | 2,7045  | 3,5510   |
| 50                                                                                                | 1,2987                                     | 1,6759 | 2,0086  | 2,4033  | 2,6778  | 3,4960   |
| 60                                                                                                | 1,2958                                     | 1,6706 | 2,0003  | 2,3901  | 2,6603  | 3,4602   |
| 120                                                                                               | 1,2886                                     | 1,6576 | 1,9799  | 2,3578  | 2,6174  | 3,3734   |
| ∞                                                                                                 | 1,2816                                     | 1,6449 | 1,9600  | 2,3263  | 2,5758  | 3,2906   |



$\alpha=0.05$ , obliczamy kwantyl rzędu  $t(0.975, 14)=2.14$

$\alpha=0.01$ , obliczamy kwantyl rzędu  $t(0.995, 14)=2.98$

- W Excelu wartość t dla tego zadania możemy uzyskać za pomocą formuły:

=ROZKŁAD.T.ODW(0,05;14)

=ROZKŁAD.T.ODW(0,01;14)

podstawiamy wartości do wzoru na przedział ufności

$$\left[ \bar{X} - t\left(1 - \frac{\alpha}{2}; n-1\right) \frac{S}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + t\left(1 - \frac{\alpha}{2}; n-1\right) \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

$\alpha=0.05$

$$L = 479,27 - 2,14 \cdot \frac{17,75}{\sqrt{15}} = 479,27 - 9,82 = 469,45$$

$$P = 479,27 + 2,14 \cdot \frac{17,75}{\sqrt{15}} = 479,27 + 9,82 = 489,08$$

Odp. [469.45; 489.08]

$\alpha=0.01$

$$L = 479,27 - 2,98 \cdot \frac{17,75}{\sqrt{15}} = 479,27 - 13,67 = 465,6$$

$$P = 479,27 + 2,98 \cdot \frac{17,75}{\sqrt{15}} = 479,27 + 13,67 = 492,93$$

Odp. [465.6; 492.93]

**Statystyki opisowe (DESCRIPTIVES)**

|          |                                    | Statystyka    | Błąd standardowy |  |
|----------|------------------------------------|---------------|------------------|--|
| VAR00001 | Średnia                            | 479,2667      | 4,58410          |  |
|          | 95% przedział ufności dla średniej | Dolna granica | 469,4348         |  |
|          |                                    | Górna granica | 489,0986         |  |
|          | 5% średnia obciąża                 | 480,1852      |                  |  |
|          | Mediana                            | 481,0000      |                  |  |
|          | Wariancja                          | 315,210       |                  |  |
|          | Odchylenie standardowe             | 17,75414      |                  |  |
|          | Minimum                            | 438,00        |                  |  |
|          | Maksimum                           | 504,00        |                  |  |
|          | Rozstęp                            | 66,00         |                  |  |
|          | Rozstęp ćwiartkowy                 | 26,00         |                  |  |
|          | Skośność                           | -,770         | ,580             |  |
|          | Kurtoza                            | ,685          | 1,121            |  |