

PODSTAWY BIOSTATYSTYKI

ĆWICZENIA

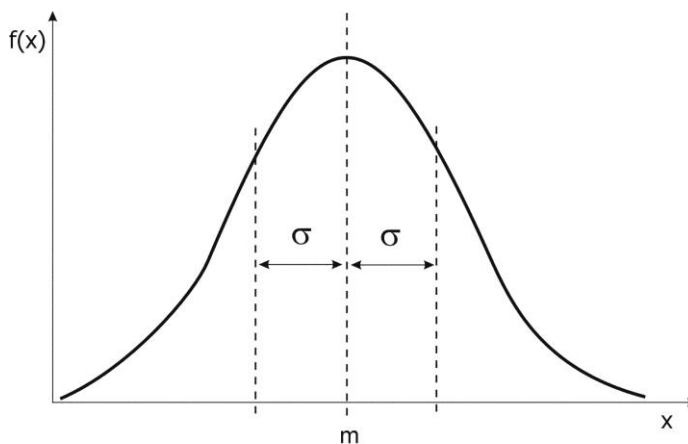


FILIP RACIBORSKI
FILIP.RACIBORSKI@WUM.EDU.PL

ZAKŁAD PROFILAKTYKI ZAGROZEŃ
ŚRODOWISKOWYCH I ALERGOLOGII WUM

PRZYPOMNIENIE

ROZKŁAD NORMALNY

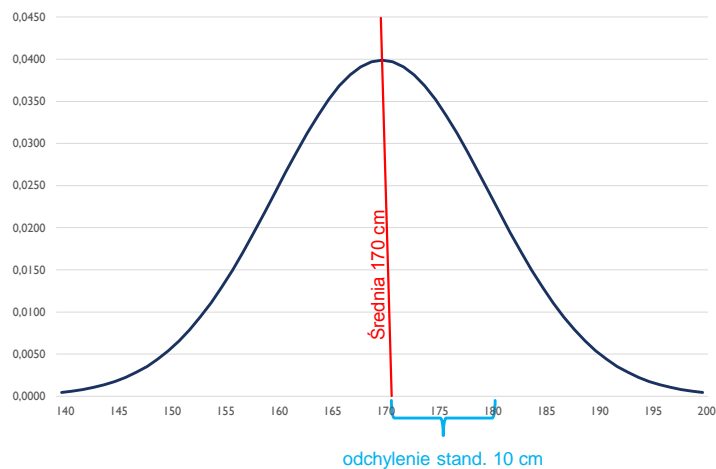


Rozkład Normalny

<http://www.zarz.agh.edu.pl/bsolinsk/statystyka.html>

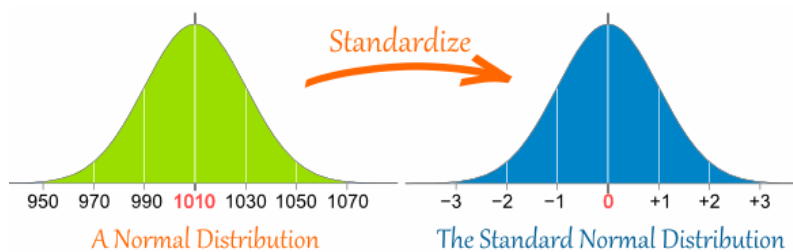
ZADANIE I

- Dane: rozkład normalny, średnia 170 cm, odchylenie standardowe 10.



ROZKŁAD NORMALNY STANDARYZOWANY

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$



<https://www.mathsisfun.com/data/standard-normal-distribution.html>

TABLICE ROZKŁADU NORMALNEGO STANDARYZOWANEGO

Powierzchnia pod krzywą rozkładu normalnego standaryzowanego. Dla wartości standardowej Z tablica podaje powierzchnię pod krzywą od Z=0 do podanej w kolumnie pierwszej i główce tablicy wartości Z

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34849	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41309	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42785	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670

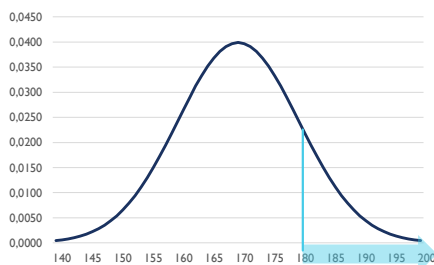
ZADANIE I - ROZWIĄZANIE

Zaznaczając odpowiednie pole i korzystając z reguły I-sigmy oblicz prawdopodobieństwo, że wzrost w pewnej populacji

a) przekracza 180 cm

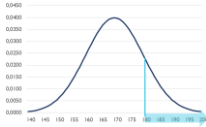
b) zawiera się w przedziale od 170 do 180 cm,

jeśli rozkład wzrostu w tej populacji jest normalny ze średnią 170 cm oraz odchyleniem 10 cm.



$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

ZADANIE I - ROZWIĄZANIE



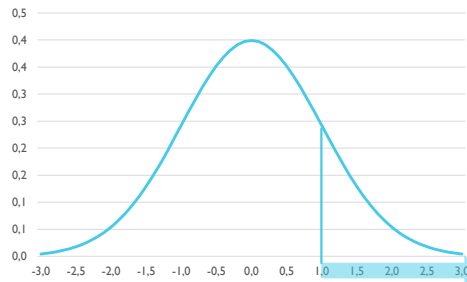
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z = \frac{180 - 170}{10}$$

$$z = \frac{10}{10}$$

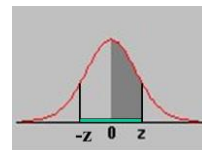
$$z = 1$$



TABLICE ROZKŁADU NORMALNEGO STANDARYZOWANEGO

Powierzchnia pod krzywą rozkładu normalnego standaryzowanego. Dla wartości standardowej Z tablica podaje powierzchnię pod krzywą od Z=0 do podanej w kolumnie pierwszej i główce tablicy wartości Z

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34849	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41309	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42785	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670



$$\phi = 0,5 - 0,34134$$

$$\phi = 0,15866$$

$$\phi = 15,9\%$$

Prawdopodobieństwo, że średni wzrost w badanej populacji przekracza 180 cm lub więcej wynosi 15,9%

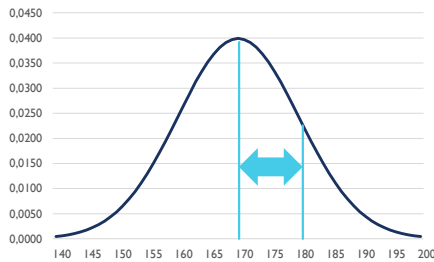
ZADANIE I - ROZWIĄZANIE

Zaznaczając odpowiednie pole i korzystając z reguły 1-sigmy oblicz prawdopodobieństwo, że wzrost w pewnej populacji

a) przekracza 180 cm

b) zawiera się w przedziale od 170 do 180 cm,

jeśli rozkład wzrostu w tej populacji jest normalny ze średnią 170 cm oraz odchyleniem 10 cm.

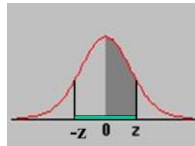


$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

TABLICE ROZKŁADU NORMALNEGO STANDARDYZOWANEGO

Powierzchnia pod krzywą rozkładu normalnego standardyzowanego. Dla wartości standardowej Z tablica podaje powierzchnię pod krzywą od Z=0 do Z=0 podanej w kolumnie pierwszej i główce tablicy wartości Z

0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0039	0,0078	0,0117	0,0156	0,0194	0,0232	0,0270	0,0308
0,1	0,0398	0,0438	0,0477	0,0517	0,0556	0,0594	0,0633	0,0671	0,0709
0,2	0,0708	0,0747	0,0786	0,0824	0,0863	0,0901	0,0939	0,0977	0,1015
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480
0,4	0,1542	0,1579	0,1617	0,1654	0,1691	0,1728	0,1764	0,1801	0,1838
0,5	0,1914	0,1949	0,1984	0,2019	0,2054	0,2089	0,2124	0,2158	0,2193
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2390	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2733	0,2763	0,2793	0,2823
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2968	0,2996	0,3024	0,3051	0,3079	0,3107
0,9	0,3159	0,3185	0,3211	0,3237	0,3262	0,3287	0,3311	0,3335	0,3359
1,0	0,3413	0,3437	0,3461	0,3484	0,3508	0,3531	0,3554	0,3576	0,3599
1,1	0,3643	0,3665	0,3687	0,3709	0,3729	0,3749	0,3768	0,3787	0,3806
1,2	0,3849	0,3868	0,3887	0,3905	0,3923	0,3941	0,3958	0,3975	0,3992
1,3	0,4030	0,4048	0,4065	0,4082	0,4098	0,4114	0,4130	0,4146	0,4162
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4250	0,4264	0,4278	0,4292	0,4306
1,5	0,4319	0,4334	0,4348	0,4361	0,4374	0,4387	0,4400	0,4413	0,4425
1,6	0,4437	0,4449	0,4461	0,4473	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525
1,7	0,4535	0,4545	0,4554	0,4563	0,4572	0,4580	0,4589	0,4597	0,4605
1,8	0,4613	0,4621	0,4629	0,4636	0,4643	0,4650	0,4656	0,4662	0,4668
1,9	0,4673	0,4678	0,4683	0,4688	0,4692	0,4696	0,4699	0,4702	0,4705



$\varphi(170 \leq x \leq 180) = ?$

$\varphi(0 \leq z \leq 1) = 0,34134$

$\varphi(0 \leq z \leq 1) = 34,1\%$

Prawdopodobieństwo, że średni wzrost w badanej populacji zawiera się między 170 a 180 cm 34,1%

ZADANIE 2

Zakładamy, że rozkład masy ciała mężczyzn jest zgodny z rozkładem normalnym o średniej 75 kg i odchyleniu standardowym 10 kg. Rozpatrujemy grupę 200 losowo wybranych mężczyzn. Obliczyć w przybliżeniu ilu mężczyzn z tej grupy:

- ma masę ciała < 70 kg
- ma masę ciała > 85 kg
- ma masę ciała w przedziale $[65,75]$



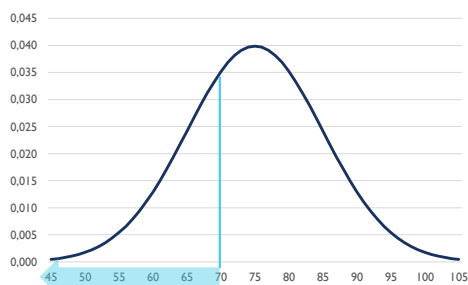
<http://www.czarnaofca.pl/?tag=waga>

ZADANIE 2

Zakładamy, że rozkład masy ciała mężczyzn jest zgodny z rozkładem normalnym o średniej 75 kg i odchyleniu standardowym 10 kg. Rozpatrujemy grupę 200 losowo wybranych mężczyzn. Obliczyć w przybliżeniu ilu mężczyzn z tej grupy:

- ma masę ciała < 70 kg**
- ma masę ciała > 85 kg
- ma masę ciała w przedziale $[65,75]$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$
$$z = \frac{70 - 75}{10}$$
$$z = \frac{-5}{10}$$
$$z = -0,5$$

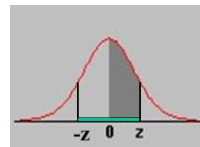


$$\varphi(x < 70) = \varphi(z < -0,5)$$

TABLICE ROZKŁADU NORMALNEGO STANDARDYZOWANEGO

Powierzchnia pod krzywą rozkładu normalnego standaryzowanego. Dla wartości standardowej Z tablica podaje powierzchnię pod krzywą od Z=0 do podanej w kolumnie pierwszej i główce tablicy wartości Z

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01596	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34849	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41309	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42785	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670



$$\begin{aligned} \varphi(x < 70) &= \varphi(z < -0,5) \\ \varphi(z < -0,5) &= 0,5 - \varphi(z) \\ \varphi(z < -0,5) &= 0,5 - 0,19146 \\ \varphi(z < -0,5) &= 0,30854 \\ \varphi(z < -0,5) &= 30,9\% \end{aligned}$$

$$30,9\% * 200 = 61,8$$

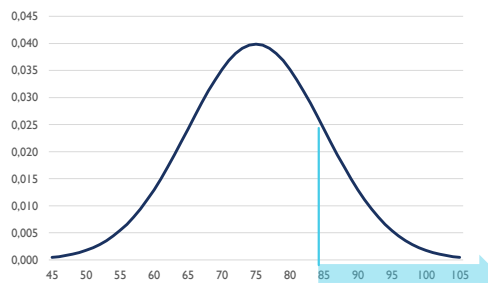
W grupie 200 badanych mężczyzn około 62 ma wagę poniżej 70 kg

ZADANIE 2

Zakładamy, że rozkład masy ciała mężczyzn jest zgodny z rozkładem normalnym o średniej 75 kg i odchyleniu standardowym 10 kg. Rozpatrujemy grupę 200 losowo wybranych mężczyzn. Obliczyć w przybliżeniu ilu mężczyzn z tej grupy:

- ma masę ciała < 70 kg
- ma masę ciała > 85 kg
- ma masę ciała w przedziale [65,75]

$$\begin{aligned} z &= \frac{x - \mu}{\sigma} \\ z &= \frac{85 - 75}{10} \\ z &= \frac{10}{10} \\ z &= 1 \end{aligned}$$

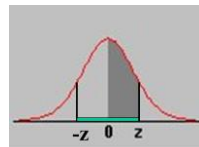


$$\varphi(x > 85) = \varphi(z > 1)$$

TABLICE ROZKŁADU NORMALNEGO STANDARYZOWANEGO

Powierzchnia pod krzywą rozkładu normalnego standaryzowanego. Dla wartości standardowej Z tablica podaje powierzchnię pod krzywą od Z=0 do podanej w kolumnie pierwszej i główce tablicy wartości Z

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01596	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34849	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41309	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42785	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670



$$\begin{aligned} \varphi(x > 85) &= \varphi(z > 1) \\ \varphi(z > 1) &= 0,5 - \varphi(z) \\ \varphi(z > 1) &= 0,5 - 0,34134 \\ \varphi(z > 1) &= 0,15866 \\ \varphi(z > 1) &= 15,9\% \end{aligned}$$

$$15,9\% \cdot 200 = 31,8$$

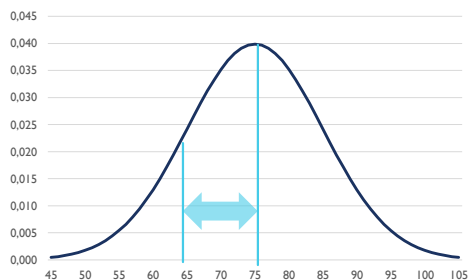
W grupie 200 badanych mężczyzn około 32 ma wagę powyżej 85 kg

ZADANIE 2

Zakładamy, że rozkład masy ciała mężczyzn jest zgodny z rozkładem normalnym o średniej 75 kg i odchyleniu standardowym 10 kg. Rozpatrujemy grupę 200 losowo wybranych mężczyzn. Obliczyć w przybliżeniu ilu mężczyzn z tej grupy:

- a) ma masę ciała < 70 kg
- b) ma masę ciała > 85 kg
- c) ma masę ciała w przedziale [65,75]

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{x_1 - \mu}{\sigma} & z_2 &= \frac{x_2 - \mu}{\sigma} \\ z_1 &= \frac{65 - 75}{10} & z_2 &= \frac{75 - 75}{10} \\ z_1 &= \frac{-10}{10} & z_2 &= 0 \\ z_1 &= -1 \end{aligned}$$

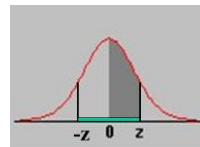


$$\varphi(65 \leq x \leq 75) = \varphi(-1 \leq z \leq 0)$$

TABLICE ROZKŁADU NORMALNEGO STANDARYZOWANEGO

Powierzchnia pod krzywą rozkładu normalnego standaryzowanego. Dla wartości standardowej Z tablica podaje powierzchnię pod krzywą od Z=0 do podanej w kolumnie pierwszej i główce tablicy wartości Z

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01596	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34849	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41309	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42785	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670



$$\begin{aligned} \varphi(65 \leq x \leq 75) &= \varphi(-1 \leq z \leq 0) \\ \varphi(-1 \leq z \leq 0) &= \varphi(z) \\ \varphi(-1 \leq z \leq 0) &= 0,34134 \\ \varphi(-1 \leq z \leq 0) &= 34,1\% \end{aligned}$$

$$34,1\% * 200 = 68,2$$

W grupie 200 badanych mężczyzn około 68 ma wagę powyżej między 65 a 75 kg.

ZADANIE 3

Podać w przybliżeniu ile osób z grupy liczącej 300 osób zdobyło na teście ilość punktów mieszczącą się w przedziale (100,115), jeżeli wiadomo, że zdobyte ilości punktów mają rozkład normalny $N(100,10^2)$.

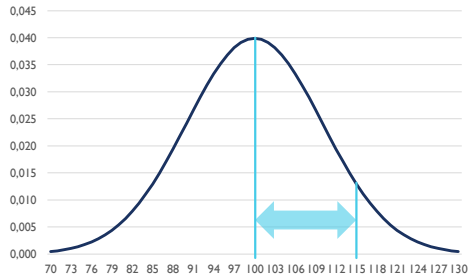


$$N(\mu, \sigma^2)$$



ZADANIE 3

Podać w przybliżeniu ile osób z grupy liczącej 300 osób zdobyło na teście ilość punktów mieszczącą się w przedziale (100,115), jeżeli wiadomo, że zdobyte ilości punktów mają rozkład normalny $N(100,10^2)$.



$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} \quad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$$

$$z_1 = \frac{100 - 100}{10} \quad z_2 = \frac{115 - 100}{10}$$

$$z_1 = \frac{0}{10} \quad z_2 = \frac{15}{10}$$

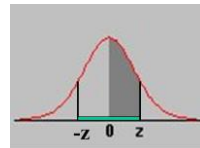
$$z_1 = 0 \quad z_2 = 1,5$$

$$\varphi(100 < x < 115) = \varphi(0 < z < 1,5)$$

TABLICE ROZKŁADU NORMALNEGO STANDARDYZOWANEGO

Powierzchnia pod krzywą rozkładu normalnego standardyzowanego. Dla wartości standardowej Z tablica podaje powierzchnię pod krzywą od Z=0 do podanej w kolumnie pierwszej i główce tablicy wartości Z

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0039	0,0079	0,0117	0,0155	0,0194	0,0232	0,0270	0,0311	0,0358
0,1	0,0398	0,0438	0,0477	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0674	0,0714	0,0753
0,2	0,0753	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1025	0,1064	0,1103
0,3	0,1103	0,1143	0,1181	0,1219	0,1257	0,1295	0,1333	0,1371	0,1408	0,1446
0,4	0,1446	0,1483	0,1521	0,1558	0,1595	0,1632	0,1669	0,1706	0,1743	0,1780
0,5	0,1780	0,1817	0,1854	0,1891	0,1927	0,1964	0,2001	0,2037	0,2073	0,2109
0,6	0,2109	0,2145	0,2181	0,2217	0,2252	0,2287	0,2322	0,2357	0,2391	0,2426
0,7	0,2426	0,2461	0,2496	0,2530	0,2564	0,2599	0,2633	0,2667	0,2700	0,2734
0,8	0,2734	0,2768	0,2801	0,2834	0,2867	0,2900	0,2933	0,2966	0,2999	0,3031
0,9	0,3031	0,3064	0,3096	0,3128	0,3160	0,3192	0,3224	0,3256	0,3287	0,3319
1,0	0,3319	0,3351	0,3382	0,3413	0,3444	0,3475	0,3506	0,3536	0,3567	0,3597
1,1	0,3597	0,3627	0,3657	0,3687	0,3716	0,3746	0,3775	0,3805	0,3834	0,3863
1,2	0,3863	0,3892	0,3921	0,3950	0,3979	0,4008	0,4036	0,4065	0,4093	0,4121
1,3	0,4121	0,4149	0,4177	0,4205	0,4232	0,4259	0,4286	0,4313	0,4340	0,4367
1,4	0,4367	0,4394	0,4421	0,4447	0,4474	0,4500	0,4526	0,4552	0,4578	0,4603
1,5	0,4603	0,4629	0,4655	0,4681	0,4706	0,4732	0,4758	0,4783	0,4808	0,4832
1,6	0,4832	0,4857	0,4881	0,4906	0,4930	0,4954	0,4978	0,5002	0,5026	0,5050
1,7	0,5050	0,5073	0,5096	0,5119	0,5142	0,5164	0,5187	0,5209	0,5231	0,5253
1,8	0,5253	0,5274	0,5295	0,5316	0,5337	0,5357	0,5377	0,5397	0,5417	0,5437
1,9	0,5437	0,5456	0,5475	0,5494	0,5513	0,5532	0,5551	0,5570	0,5589	0,5607



$$\varphi(100 < x < 115) = ?$$

$$\varphi(0 < z < 1,5) = \varphi(z)$$

$$\varphi(0 < z < 1,5) = 0,43319$$

$$\varphi(0 < z < 1,5) = 43,3\%$$

$$43,3\% * 300 = 129,9$$

W grupie 300 badanych osób około 130 uzyskało wynik z testu w przedziale między 100 a 115 punktów.

ZADANIE 4

Podaj prawdopodobieństwo, że średnia arytmetyczna z 16 pomiarów

- znajdzie się w przedziale (8, 12)
- przekracza 11,

jeśli przyjmujemy, że pomiary pochodzą z rozkładu normalnego o średniej 10 i odchyleniu 4.



<http://www.farmacjalja.pl/poradnik-farmaceuty/prawo/pomiar-cisnienia-krwi-w-aptece.html>

PRZYPOMNIENIE

Jeśli X jest zmienną losową o rozkładzie normalnym

$$N(\mu, \sigma^2)$$

To zmienna losowa \bar{X} ma rozkład:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Uśredniony wynik n pomiarów ma odchylenie standardowe

$$D\bar{X} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Jeśli uśrednimy, powiedzmy 100 niezależnych pomiarów, to dokładność wyniku zwiększy się

$$\sqrt{100} = 10$$

dziesięć razy w porównaniu z dokładnością pojedynczego pomiaru.

Marta Zalewska: Rozkłady prawdopodobieństwa zmiennych losowych

ZADANIE 3

Podaj prawdopodobieństwo, że średnia arytmetyczna z 16 pomiarów

a) znajdzie się w przedziale (8, 12)

b) przekracza 11,

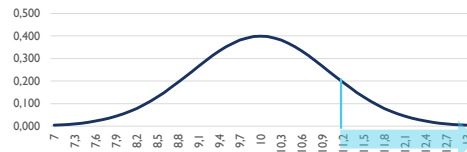
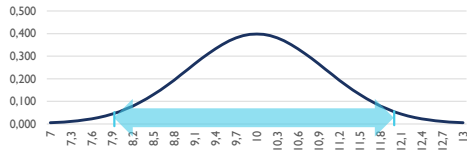
jeśli przyjmiemy, że pomiary pochodzą z rozkładu normalnego o średniej 10 i odchyleniu 4.

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$z_1 = \frac{8 - 10}{4/\sqrt{16}} \quad z_2 = \frac{12 - 10}{4/\sqrt{16}}$$

$$z_1 = \frac{-2}{1} \quad z_2 = \frac{2}{1}$$

$$z_1 = -2 \quad z_2 = 2$$



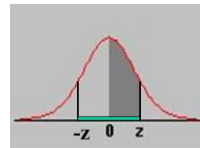
$$z_3 = \frac{x_3 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad z_3 = \frac{1}{1}$$

$$z_3 = \frac{11 - 10}{4/\sqrt{16}} \quad z_3 = 1$$

TABLICE ROZKŁADU NORMALNEGO STANDARDYZOWANEGO

Powierzchnia pod krzywą rozkładu normalnego standaryzowanego. Dla wartości standardowej Z tablica podaje powierzchnię pod krzywą od Z=0 do podanej w kolumnie pierwszej i główce tablicy wartości Z

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0039	0,0079	0,0119	0,0159	0,0199	0,0239	0,0279	0,0318	0,0358
0,1	0,0398	0,0438	0,0477	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0674	0,0714	0,0753
0,2	0,0792	0,0831	0,0870	0,0909	0,0948	0,0987	0,1025	0,1064	0,1102	0,1140
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1330	0,1368	0,1405	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1627	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1843	0,1879
0,5	0,1914	0,1949	0,1984	0,2019	0,2054	0,2088	0,2122	0,2156	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2290	0,2323	0,2356	0,2389	0,2421	0,2453	0,2485	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2733	0,2763	0,2793	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2938	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3105	0,3132
0,9	0,3159	0,3185	0,3211	0,3238	0,3263	0,3289	0,3314	0,3339	0,3364	0,3389
1,0	0,3413	0,3437	0,3461	0,3484	0,3508	0,3531	0,3554	0,3576	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3707	0,3728	0,3749	0,3769	0,3790	0,3810	0,3829
1,2	0,3849	0,3868	0,3887	0,3906	0,3925	0,3943	0,3961	0,3979	0,3997	0,4014
1,3	0,4032	0,4049	0,4065	0,4082	0,4098	0,4114	0,4130	0,4146	0,4161	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4250	0,4264	0,4278	0,4292	0,4305	0,4318
1,5	0,4331	0,4344	0,4357	0,4369	0,4382	0,4394	0,4406	0,4417	0,4429	0,4440
1,6	0,4450	0,4463	0,4473	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4524	0,4532	0,4540
1,7	0,4543	0,4553	0,4562	0,4571	0,4580	0,4589	0,4598	0,4606	0,4614	0,4622
1,8	0,4640	0,4648	0,4656	0,4663	0,4671	0,4678	0,4685	0,4692	0,4699	0,4706
1,9	0,4712	0,4719	0,4725	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4755	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4807	0,4812	0,4816



a) znajdzie się w przedziale (8, 12)

$$\varphi(8 < x < 12) = \varphi(-2 < z < 2)$$

$$\varphi(-2 < z < 2) = 2 * \varphi(z)$$

$$\varphi(-2 < z < 2) = 2 * 0,47725$$

$$\varphi(-2 < z < 2) = 0,9545$$

$$\varphi(-2 < z < 2) = 95,5\%$$

b) przekracza 11

$$\varphi(x > 11) = \varphi(z > 1)$$

$$\varphi(z > 0,25) = 0,5 - \varphi(z)$$

$$\varphi(z > 0,25) = 0,5 - 0,34134$$

$$\varphi(z > 0,25) = 0,15866$$

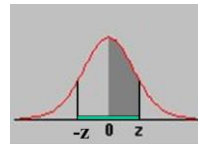
$$\varphi(z > 0,25) = 15,9\%$$

ZADANIE 5

Odczytaj kwantyle rzędu 0.90, 0.95, 0.975, 0.20 ze standardowego rozkładu normalnego oraz zaznacz je na odpowiednim rysunku gęstości rozkładu.

Powierzchnia pod krzywą rozkładu normalnego standaryzowanego. Dla wartości standardowej Z tabela podaje powierzchnię pod krzywą od $Z=0$ do podanej w kolumnie pierwszej i główce tablicy wartości Z

0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0039	0,0078	0,0117	0,0155	0,0194	0,0232	0,0270	0,0308
0,1	0,0398	0,0438	0,0477	0,0517	0,0556	0,0595	0,0634	0,0673	0,0712
0,2	0,0792	0,0831	0,0870	0,0909	0,0948	0,0987	0,1025	0,1064	0,1102
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1330	0,1368	0,1405	0,1443	0,1480
0,4	0,1542	0,1580	0,1617	0,1654	0,1691	0,1728	0,1764	0,1801	0,1838
0,5	0,1914	0,1949	0,1984	0,2019	0,2054	0,2088	0,2122	0,2156	0,2190
0,6	0,2257	0,2290	0,2323	0,2356	0,2389	0,2421	0,2453	0,2485	0,2517
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2733	0,2763	0,2793	0,2823
0,8	0,2881	0,2910	0,2938	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3105
0,9	0,3159	0,3185	0,3211	0,3238	0,3264	0,3289	0,3314	0,3338	0,3361
1,0	0,3413	0,3437	0,3461	0,3484	0,3508	0,3531	0,3554	0,3576	0,3599
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3707	0,3728	0,3749	0,3769	0,3789	0,3809
1,2	0,3849	0,3868	0,3887	0,3905	0,3925	0,3943	0,3961	0,3979	0,3997
1,3	0,4032	0,4049	0,4065	0,4082	0,4098	0,4114	0,4130	0,4146	0,4162
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4250	0,4264	0,4278	0,4292	0,4306
1,5	0,4331	0,4344	0,4357	0,4369	0,4382	0,4394	0,4406	0,4417	0,4429
1,6	0,4452	0,4463	0,4473	0,4484	0,4495	0,4505	0,4514	0,4524	0,4532
1,7	0,4554	0,4563	0,4572	0,4581	0,4590	0,4599	0,4608	0,4616	0,4624
1,8	0,4647	0,4655	0,4662	0,4669	0,4676	0,4683	0,4689	0,4695	0,4702
1,9	0,4712	0,4719	0,4725	0,4730	0,4735	0,4740	0,4744	0,4748	0,4752
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4792	0,4796	0,4800	0,4803	0,4807
2,1	0,4821	0,4825	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4853
2,2	0,4861	0,4864	0,4867	0,4871	0,4874	0,4877	0,4880	0,4883	0,4886
2,3	0,4892	0,4895	0,4898	0,4901	0,4903	0,4906	0,4908	0,4911	0,4913
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4924	0,4926	0,4928	0,4930	0,4932	0,4934
2,5	0,4937	0,4939	0,4941	0,4943	0,4944	0,4946	0,4947	0,4949	0,4950
2,6	0,4953	0,4954	0,4956	0,4957	0,4958	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4978	0,4979	0,4980
2,9	0,4981	0,4981	0,4982	0,4983	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985
3,0	0,4986	0,4986	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4990
3,1	0,4990	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992
3,2	0,4993	0,4993	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996
3,4	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997
3,5	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998



kwantyle rzędu:

- 0.90 ($z=1,28$)
- 0.95 ($z=1,64$)
- 0.975 ($z=1,96$)
- 0.20 ($z=-0,84$)